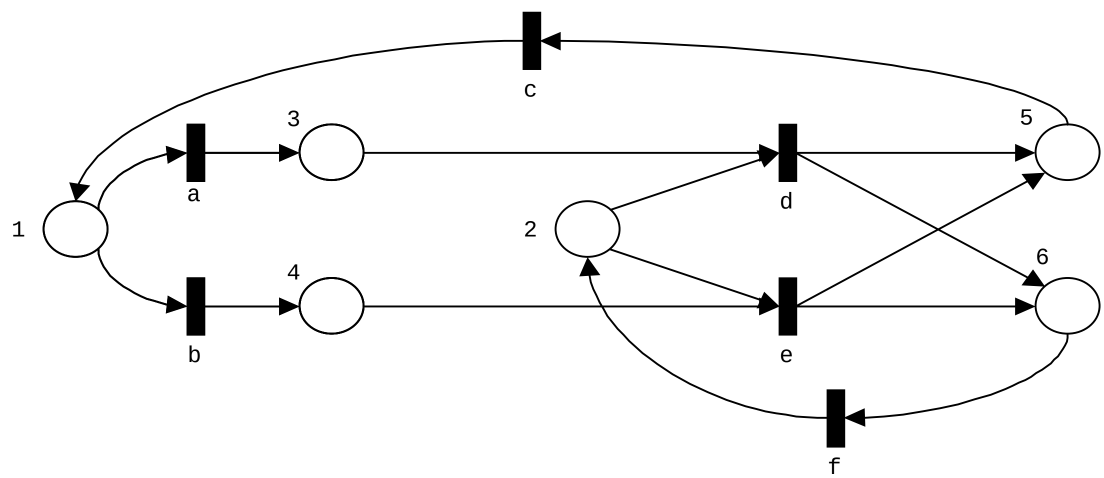
ISIS 210 Modelaje y métodos formales
Redes de Petri
Rodrigo Cardoso

1 DEFINICIONES

Una *red de Petri* es un grafo bipartito dirigido, i.e., un grafo dirigido con dos clases disyuntas de nodos:
- *sitios*, representados con círculos, y
- *transiciones*, representadas con barras.

Los arcos del grafo van de sitios a transiciones o de transiciones a sitios. Cada sitio desde el que sale un arco hacia una transición `H` es un *sitio de entrada* de `H`; cada sitio al que llega un arco desde una transición `H` es un *sitio de salida* de la transición de `H`.



Además de las propiedades estáticas, representadas por el grafo, una red de Petri tiene propiedades dinámicas, que son expresadas mediante una *marcación* de los sitios.

Una `X`-*marcación* de una red de Petri con conjunto de sitios `S` es una función $m:S \rightarrow X$. Usualmente, $X \in$ {**bool**, **nat**}, y se habla de redes de Petri booleanas o naturales. Un nodo `s` se marca con el valor `m.s`.

1.1 Redes booleanas

En una representación gráfica de una red de Petri booleana, un sitio `s` para el que `m.s` sea `true` se decora con un marcador (inglés: *token*).

Una marcación se puede denotar por la tupla de los sitios que están marcados `true`.

Se permite un *cambio de marcación* cuando existe al menos una transición tal que todos sus sitios de entrada están marcados `true`.

Una transición en la condición anterior se dice *disparable*. El cambio en la marcación (*disparar la transición*) consiste en pasar a una marcación igual a la original, excepto que:
- todos los sitios de entrada de la transición disparada se marcan con `false`, y
- todos los sitios de salida de la transición disparada se marcan con `true`.

1.2 Redes naturales

En una representación gráfica de una red de Petri natural, un sitio `s` para el que `m.s` sea mayor que `0` se decora con el número corrrespondiente.

Una marcación se puede denotar por la tupla de los valores que marcan a los sitios.

Se permite un *cambio de marcación* cuando existe al menos una transición tal que todos sus sitios de entrada están marcados con números positivos.

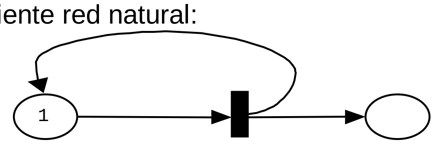
Una transición en la condición anterior se dice *disparable*. El cambio en la marcación (*disparar la transición*) consiste en pasar a una marcación igual a la original, excepto que:
- cada sitio de entrada `s` de la transición disparada se marca con `m.s - 1`, y
- cada sitio de salida `s` de la transición disparada se marca con `m.s + 1`.

2 Vivacidad

Una marcación está *viva* si permite un cambio y si cada posible marcación sucesora está viva. Una marcación no viva se llama *terminante*.

En la red del ejemplo de 1, la marcación `(1,2)` está viva. Para ver esto, obsérvese que pueden suceder los cambios de marcación:
- `(1,2)`→`(3,2)`→`(5,6)`→`(1,6)`→`(1,2)`→ …
- `(1,2)`→`(3,2)`→`(5,6)`→`(5,2)`→`(1,2)`→ …
- `(1,2)`→`(4,2)`→`(5,6)`→`(1,6)`→`(1,2)`→ …
- `(1,2)`→`(4,2)`→`(5,6)`→`(5,2)`→`(5,6)`→ …

Otro ejemplo de red viva es la siguiente red natural:



3 Secuencialidad

Para una red de Petri booleana, una *1-marcación* es una marcación en la que sólo un sitio es marcado con `true` y los demás con `false`. Si la red es natural, una *1-marcación* es una marcación que marca un sitio con `1` y los demás con `0`.

Una red de Petri es *secuencial* si toda marcación por la que pase es una 1-marcación. De hecho, vale el siguiente resultado:

***Teorema**: Una red es secuencial si y sólo si, cuando se comienza con una 1-marcación, toda transición tiene exactamente un sitio de entrada y uno de salida.*

Si en una red secuencial se eliminan las transiciones, se llega a una diagrama de flujo clásico.

Nótese que, aun en el caso de una red secuencial, es factible que de un sitio salgan dos o más arcos hacia transiciones diferentes. Si este sitio llega a marcarse, cualquiera de las transiciones para las que sirve de entrada puede dispararse, siendo *no determinística* la elección de la finalmente se escoja para ser disparada.

Otro caso posible es el de dos o más transiciones que sean disparables, pero que al disparar alguna de llas las demás dejen de ser disparables. En este caso, se dice que, antes de disparar alguna de las transiciones, éstas se encuentran *en conflicto*, el cual se resuelve con la elección no determinística de alguna de las transiciones para ser disparada.

En el ejemplo de 1, la marcación `(2,3,4)` deja las transiciones d y e en conflicto.

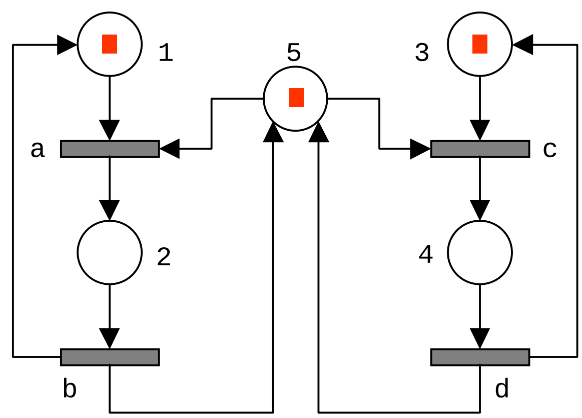
4 Ejecución

Una *ejecución* o *juego* de una red de Petri es una sucesión de marcaciones $\langle m_0, m_1, \ldots\rangle$ donde, para $k>0$, m_k es el resultado de un cambio de marcación sobre m_{k-1}.

Una marcación de una red es *segura* si, para toda ejecución que resulte de cambios permisibles de ella, los sitios de salida de las transiciones disparadas en cada caso están libres (marcados con `false` ó `0`, según la clase de red) antes de ser disparada.

El último ejemplo de 2 muestra una marcación no segura.

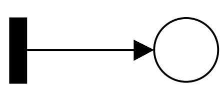
En el siguiente ejemplo, la marcación `(1,3,5)` es segura, pero no la marcación `(1,4,5)`:



El siguiente resultado puede demostrarse[1]:

Teorema: *Las marcaciones seguras de una red de Petri son cerradas ante cambios permisibles.*

Hay redes que no admiten marcaciones seguras. Por ejemplo:



La conexión entre redes naturales y booleanas seguras queda establecida por el siguiente

Teorema: *Una red de Petri natural con una marcación segura puede ser remplazada por una red de Petri booleana correspondiente –con una marcación segura- y viceversa (*`1` ≡ `true`; `0` ≡ `false`*).*

[1] En cambio, mostrar que una marcación es segura no parece fácil: hay que asegurrase de que toda posible marcación sucesora, en cualquier ejecución a partir de ella, sea segura.

5 Modelaje de procesos

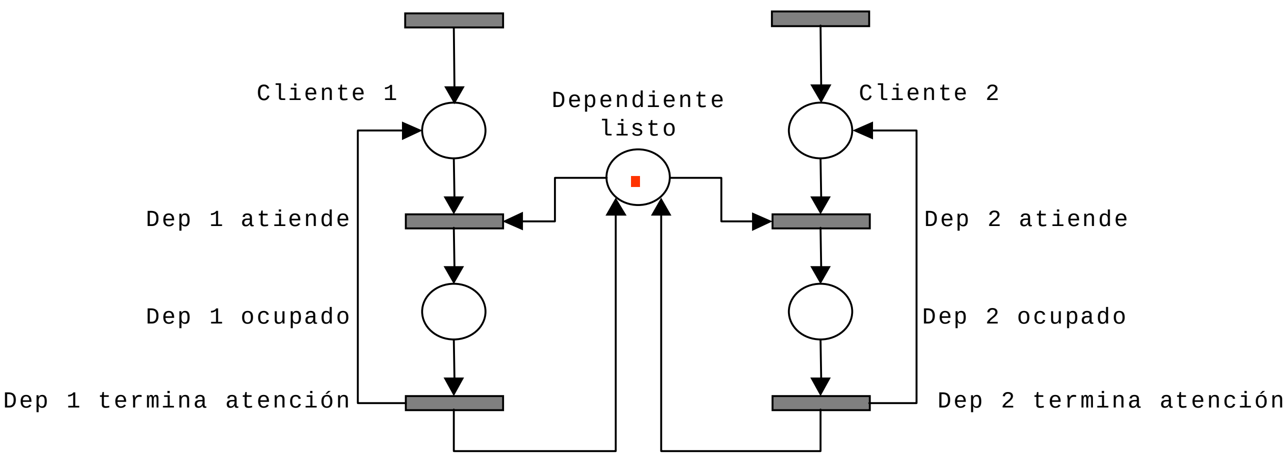
Las redes de Petri sirven para modelar procesos concurrentes. Una red booleana sirve en este sentido, con las siguientes interpretaciones:

- los sitios marcados representan condiciones que se cumplen; los no marcados, las que no se cumplen;
- las transiciones que se disparan tiene todas sus precondiciones satisfechas; el disparar una transición conlleva cumplir sus poscondiciones y dejar de cumplir sus precondiciones.

La posibilidad de que haya varias marcas en una marcación da lugar a la posible concurrencia de actividades. La concurrencia en sí por el hecho de efectuar dos o más transiciones simultáneas no se presenta en las ejecuciones; sin embargo, si hay dos transiciones disparables pero no en conflicto, el que se puedan disparar en cualquier orden es una manera de modelar la eventual concurrencia, ya que los cambios que cada transición realiza no afectan el disparo de la otra.

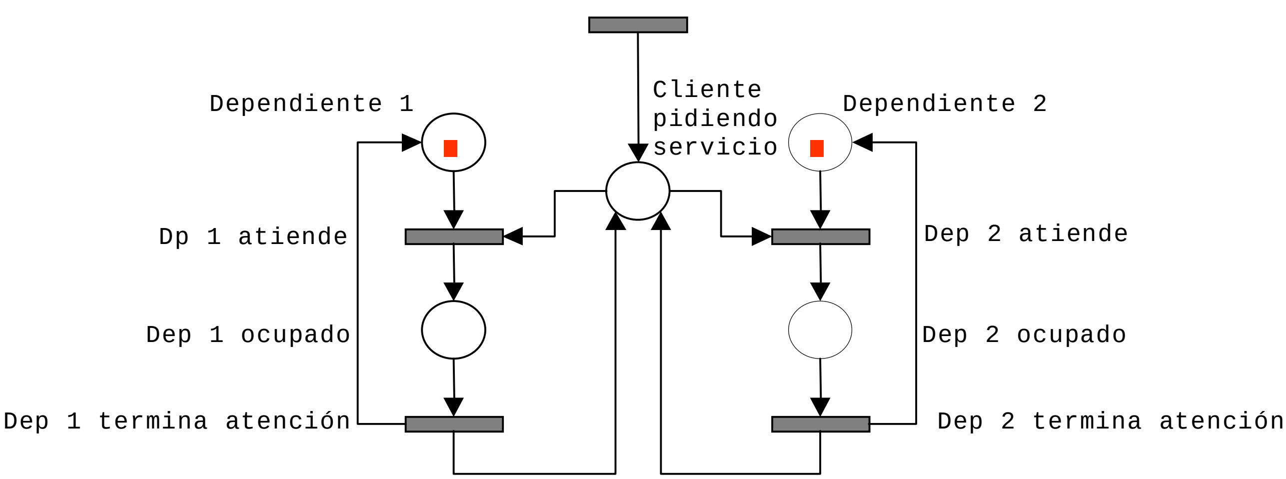
5.1 Ejemplo: un servidor, dos clientes

Considérese el modelaje del trabajo de una persona que atiende dos clases de solicitantes, digamos, estudiantes y profesores:



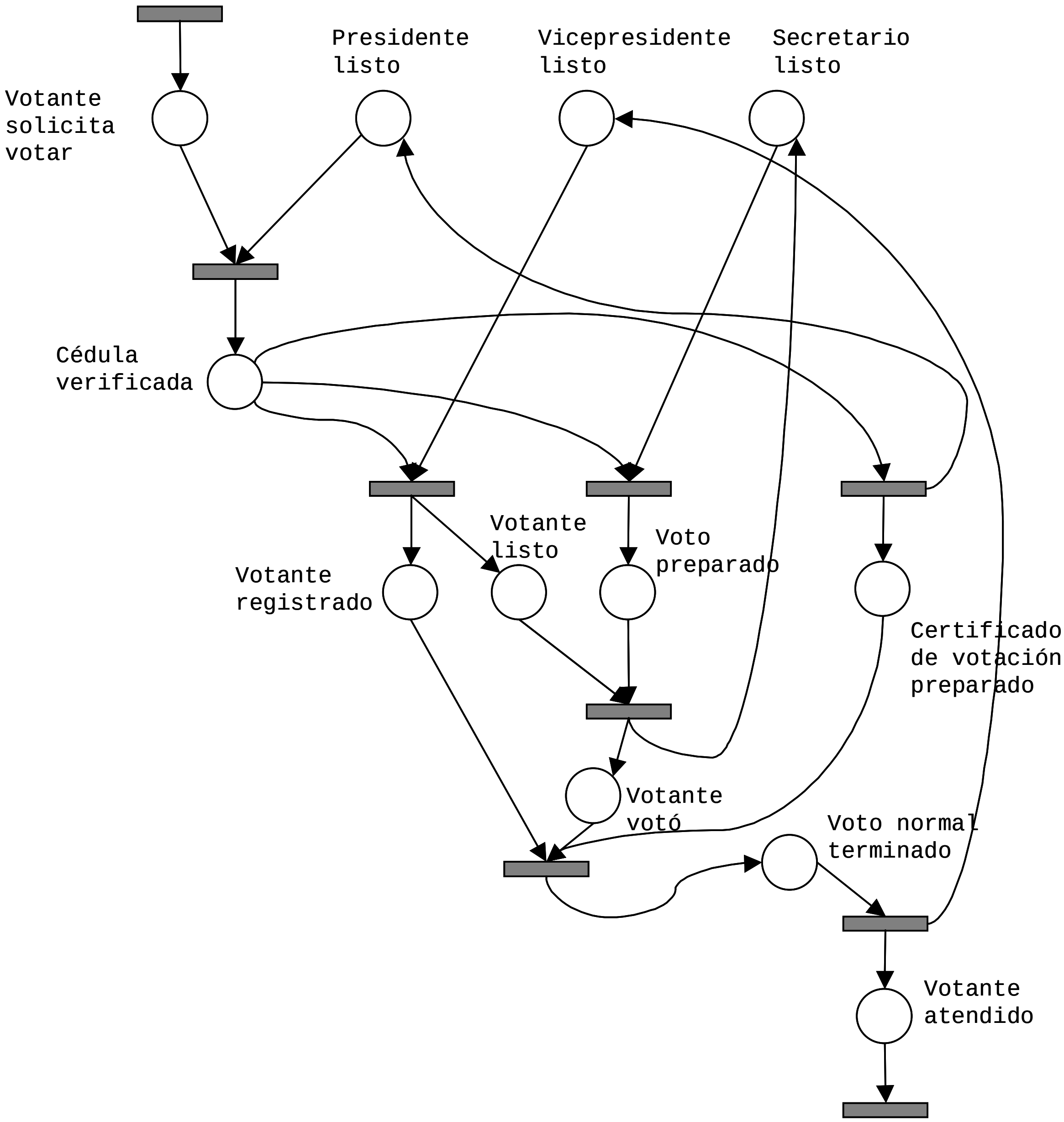
5.2 Ejemplo: dos servidores, varios clientes en secuencia

Considérese el modelaje del trabajo de dos personas que atienden una fila de solicitantes:



Según el modelo anterior, puede llegar un cliente solicitando un servicio. Enseguida, alguno de los dependedientes podrá atenderlo, lo que haría que el cliente se ocupara hasta que el trabajo encargado fuera terminado. El modelo podría completarse modelando la fila de los solicitantes de manera que pudieran atenderse siguiendo marcaciones seguras.

5.3 Ejemplo: funcionamiento de una mesa de votación



BIBLIOGRAFÍA

[Bau1981] Bauer, F.L.., Wössner, H. *Algorithmische Sprache und Programmentwicklung*, Springer-Verlag, 1981.

[Pet1977] Peterson, J.L., Petri Nets, Computing Surveys 9, 1977.