6 RELACIONES Y FUNCIONES

Relacionar elementos de conjuntos es usual en el lenguaje matemático, v.gr., "3 es mayor que 1", "true es más débil que false", "Adán es el padre de Caín", etc. En general, esta clase de afirmaciones es la que tiene predicados como lenguaje formal correspondiente.

En otras palabras, una relación es una afirmación sobre elementos de conjuntos que se expresa con un predicado y, por tanto, puede ser o no verdadera. La formalización de esta idea resulta muy sencilla cuando una relación se identifica con un subconjunto de un producto cartesiano. Las relaciones binarias -que relacionan dos elementos- son especialmente interesantes y, quizás más, las relaciones binarias de elementos de un mismo conjunto. Ejemplos de esto son "ser menor", "dividir a", "ser igual a", etc., hablando de números enteros.

Las funciones se mostrarán como relaciones especiales, que cumplen propiedades específicas que las hacen útiles para expresar y calcular.

6.1 RELACIONES BINARIAS

Una *relación binaria* de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.

Se usan las siguientes notaciones:
- $A \leftrightarrow B$: conjunto de las relaciones de A en B. Es decir, $A \leftrightarrow B = 2^{A\times B}$.
- $A \leftrightarrow A$: conjunto de las relaciones en A (de A en A). O bien, $A \leftrightarrow A = 2^{A\times A}$.

Se escribe

$$R:\ A \leftrightarrow B$$

para significar que R es una relación de A en B. Si $a \in A$, $b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a,b) \in R$. En este caso, es usual encontrar notaciones como
- aRb
- $R(a,b)$
- R_{ab} .

También se definen, para $R:\ A \leftrightarrow B$:
- A : el *dominio* de la relación R
- B : el *codominio* de la relación R
- $\mathrm{dom}\ R = \{a \mid (\exists b \mid : aRb)\}$: el *dominio de definición* de la relación R
- $\mathrm{ran}\ R = \{b \mid (\exists a \mid : aRb)\}$: el *rango* de la relación R
- $R^T:\ B \leftrightarrow A$
  $R^T = \{(b,a) \mid aRb\}$: la relación R *transpuesta*[1]

Se consideran las siguientes relaciones especiales
- $\varnothing$: la relación *vacía*
- $L = A \times B$: la relación *total / universal* en $A \times B$
- I : la relación *identidad* en A

[1] En la literatura también se usa la notación R^{-1} para denotar la transpuesta.

6.1.1 Tipos de relaciones

En la siguiente tabla, sea $R: A \leftrightarrow B$. La primera columna se refiere a la denominación de conceptos que se utilizan para referirse a propiedades de las relaciones. La segunda columna establece la definición formal de estos conceptos. La tercera columna muestra ejemplos de los conceptos introducidos.

	Definición	*Ejemplo*
R *total*	$(\exists b:B \mid : aRb)$	`.<. :  nat` $\leftrightarrow$ `nat`

R *unívoca*
R *función parcial*
	$aRb_1 \wedge aRb_2 \Rightarrow b_1=b_2$	`pred : nat` $\leftrightarrow$ `nat`
		`pred = {(x,y)| y=x-1}`
		
		Si b_1=a-1 y b_2=a-1
		entonces
		$b_1 = b_2$

R *1-1*
R *inyectiva*
	$a_1Rb \wedge a_2Rb \Rightarrow a_1=a_2$	`suc : nat` $\leftrightarrow$ `nat`
		`suc={(x,y)|y=x+1}`
		
		Si b=a_1+1 y b=a_2+1
		entonces
		$a_1 = a_2$

R *sobre* R *sobreyectiva*	$(\exists a:A \mid : aRb)$	`.<. :  int` $\leftrightarrow$ `int`
R *función*	R unívoca $\wedge$ R total	`suc : nat` $\leftrightarrow$ `nat` `suc={(x,y)|y=x+1}`
R *biyección* R *biyectiva*	R función $\wedge$ R 1-1 $\wedge$ R sobre	`I: A` $\leftrightarrow$ `A` `I = {(x,y)| x=y}`

Nótese que:

- R total $\equiv$ `dom R = A`
- R total $\equiv$ R^T sobre
- R sobre $\equiv$ `ran R = B`
- R unívoca $\equiv$ R^T 1-1
- R biyección $\equiv$ R^T biyección.

6.1.2 Representaciones

Las relaciones se pueden representar de diversas formas. El uso de una representación específica depende de la aplicación que se tenga en mente y de la facilidad de manipulación de la información que la relación guarda.

6.1.2.1 Matrices

Una matriz M de tipo X, de dimensiones $m \times n$, es un arreglo de m filas y n columnas de elementos de tipo X. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{B})$ es el conjunto de las matrices booleanas de dimensiones $m \times n$. El elemento en la fila i y columna j de la matriz M se denota M[i,j], para $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

En general, si $A = \{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B = \{b_1,b_2,...,b_n\}$, una relación $R: A \leftrightarrow B$ se puede representar con una matriz booleana $M_R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{B})$ tal que, para $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$:

$$M_R[i,j] \equiv a_i \; R \; b_j.$$

Por ejemplo: $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{x,y,z\}$. La relación $R = \{(a,x),(c,y),(d,x)\}$ se puede representar con la matriz

$$M_R = \begin{pmatrix} 100 \\ 000 \\ 010 \\ 100 \\ 000 \end{pmatrix}$$

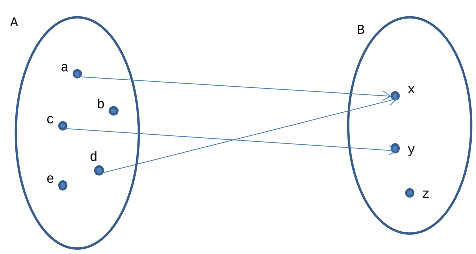
entendiendo que a_1=a, a_2=b, a_3=c, a_4=d, a_5=e, b_1=x, b_2=y, b_3=z.

6.1.2.2 Grafos

Un *grafo* (*dirigido*) $G(V,E)$ es una estructura matemática en la que se tiene un conjunto de *vértices* V y un conjunto de *arcos* E. Un arco es una pareja $(u,v) \in V \times V$; se interpreta como una conexión del vértice u al vértice v.

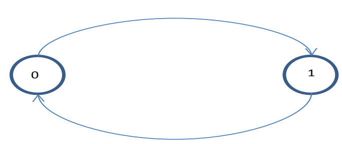
En otras palabras, un grafo es una representación de una relación sobre el conjunto de vértices V. La relación representada es, precisamente, la de "ser arco". Es usual tener una versión visual de esta representación, en la que los vértices se representan como puntos en el espacio y un arco (u,v) se representa con una conexión dirigida del vértice u al vértice v.

Una relación $R\!: A \leftrightarrow B$ se puede representar con un grafo $G(A \cup B, R)$, en el que el dominio y el rango se dibujan como conjuntos aparte y los arcos van desde puntos de A hasta B, mostrando la correspondencia entre el dominio y el rango, v.gr.,



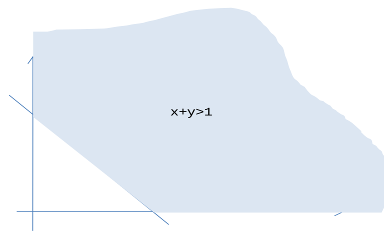
Una relación $R\!: A \leftrightarrow A$ se puede representar, de manera análoga, con un grafo $G(A,R)$. Hay que tener en cuenta que los arcos van de puntos del conjunto A en él mismo.

El caso en que dominios y rangos son finitos permite pensar en una visualización del grafo que ayuda a entender la relación. Para el caso de una relación $R\!: A \leftrightarrow A$, con $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, la representación gráfica corresponde a un grafo $G(A, \rightarrow)$ con arcos $i \rightarrow j$ si y solo si $R(a_i, a_j)$. Por ejemplo, la relación $S=\{(0,1),(1,0)\}$, definida en $\{0,1\}$ se puede representar con el grafo:



6.1.2.3 Gráficas 2D y 3D

Cuando los dominios son numéricos se pueden mostrar en un plano cartesiano, v.gr., la relación $R=\{(x,y):\mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid x+y>1\}$ se puede representar con la gráfica



Ejercicios 6.1

1 Para cada una de las siguientes relaciones decidir si es total, unívoca, inyectiva, sobreyectiva:

a $.>. : \mathbf{nat} \leftrightarrow \mathbf{nat}$
b $.\geq. : \mathbf{nat} \leftrightarrow \mathbf{nat}$
c $.>. : \mathbf{nat} \leftrightarrow \mathbf{int}$
d $.>. : \mathbf{int} \leftrightarrow \mathbf{nat}$
e $.R. : \mathbf{nat} \leftrightarrow \mathbf{nat}$, donde $aRb \equiv a=b+1$
f $.M. : \mathbf{nat} \leftrightarrow \mathbf{nat}$, donde $R=\{(0,x):x\in\mathbf{nat}\}$

2 Sean $A = \{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B = \{b_1,b_2,...,b_n\}$, $R: A\leftrightarrow B$ y $M_R\in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbf{B})$ la matriz que representa esta relación. Dar condiciones sobre M_R, para que R sea:

a total
b unívoca
c inyectiva
d sobreyectiva.

3 Sean $A = \{0,1,2,3,4,5\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$. Construya las matrices booleanas que representan las siguientes relaciones:

a $.\leq. : A \leftrightarrow B$
b $.<. : A \leftrightarrow B$
c $.\geq. : A \leftrightarrow B$
d $.>. : A \leftrightarrow B$
e $.|. : A \leftrightarrow B$, donde $a|b$ se entiende como “a divide a b”
f $.R. : A \leftrightarrow B$, donde $aRb \equiv a+b=5$

6.2 COMPOSICIÓN RELACIONAL

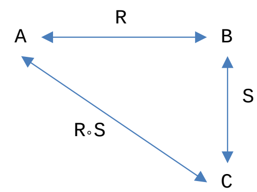
Dadas dos relaciones $R: A \leftrightarrow B$, $S: B \leftrightarrow C$, se define la *composición de* R con S como una relación $R\circ S: A \leftrightarrow C$ tal que:

$$R\circ S = \{(a,c)|\ (\exists b|b\in B: aRb \wedge bSc)\}.$$

La notación elegida permite afirmar que

$$a\ R\circ S\ c \equiv (\exists b|b\in B: aRb \wedge bSc).$$

La composición se puede representar con un diagrama de la forma:



6.2.1 Composición relacional y operaciones de conjuntos

Los siguientes teoremas se pueden demostrar a partir de las definiciones:

Teo A:

$\circ$ asociatividad	:	$R\circ(S\circ T) = (R\circ S)\circ T$
Distributividad $\circ/\cup$	:	$R\circ(S \cup T) = (R\circ S) \cup (R\circ T)$ $(S \cup T)\circ R = (S\circ R) \cup (T\circ R)$
Semidistributividad $\circ/\cap$	:	$R\circ(S \cap T) \subseteq (R\circ S) \cap (R\circ T)$ $(S \cap T)\circ R \subseteq (S\circ R) \cap (T\circ R)$

[]

6.2.2 Composición relacional y productos matriciales

La multiplicación de matrices booleanas se define de modo que la matriz resultado en la posición (i,j) es la disyunción de las conjunciones de filas y columnas. Más exactamente, si $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{B})$ es el conjunto de las matrices booleanas de dimensiones $m\times n$, cuando se tienen matrices $P\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{B})$, $Q\in \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbf{B})$, se puede definir la matriz producto $PQ\in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbf{B})$, de modo que:

$$(PQ)[i,j] = (\vee k|\ 1\leq k\leq n : P[i,k] \wedge Q[k,j]),\text{ para } 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n.$$

Considérense tres dominios $A = \{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$, $B = \{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$, $C = \{c_1,c_2,\ldots,c_p\}$, de modo que se tengan relaciones $R: A \leftrightarrow B$, $S: B \leftrightarrow C$ y $R\circ S: A\leftrightarrow C$. Cada una de estas relaciones tiene una representación matricial correspondiente, donde $M_R\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{B})$, $M_S\in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{B})$ y $M_{R\circ S}\in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbf{B})$. Más exactamente, para $1\leq i\leq m$, $1\leq k\leq n$, $1\leq j\leq p$:

$$M_R[i,k] \equiv a_i\ R\ b_k$$
$$M_S[k,j] \equiv b_k\ S\ c_j$$
$$M_{R\circ S}[i,j] \equiv a_i\ R\circ S\ c_j$$

Ahora, obsérvese que

$M_{R\circ S}[i,j]$

=

$a_i\ R\circ S\ c_j$

=

$(\exists k|\ 1\leq k\leq n: a_i R b_k \wedge b_k S c_j)$

=

$(M_R M_S)[i,j]$

Es decir:

$$M_R M_S = M_{R\circ S}.$$

La composición de relaciones es especialmente interesante para relaciones en un conjunto. Para $R: A\leftrightarrow A$, se pueden definir *potencias*, así:

$R^0 = I$
$R^{k+1} = R^k \circ R \quad , \; k\geq 0$

En este caso, es claro que, para $k\geq 0$:

$$(M_R)^k = M_{R^k}.$$

6.3 RELACIONES EN A

Las relaciones sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas. La siguiente tabla lista algunas propiedades importantes, para una $R: A \leftrightarrow A$:

	Definición	*Ejemplo*
R *reflexiva*	aRa	$.\geq. : \text{nat} \leftrightarrow \text{nat}$
R *irreflexiva*	$\neg$aRa	$.<. : \text{nat} \leftrightarrow \text{nat}$
R *simétrica*	aRb $\Rightarrow$ bRa	hno : Persona $\leftrightarrow$ Persona hno(a,b) $\equiv$ "a es hermano de b"
R *asimétrica*	aRb $\Rightarrow$ $\neg$bRa	$.<. : \text{nat} \leftrightarrow \text{nat}$
R *antisimétrica*	aRb $\wedge$ bRa $\Rightarrow$ a=b	$.\subseteq. : 2^A \leftrightarrow 2^A$
R *transitiva*	aRb $\wedge$ bRc $\Rightarrow$ aRc	.|. : nat $\leftrightarrow$ nat a|b $\equiv$ ($\exists$d|: b = d*a)
R *equivalencia*	R reflexiva, simétrica, transitiva	$.\equiv_m. : \text{nat} \leftrightarrow \text{nat}$ $a \equiv_m b \equiv m\|(a-b)$
R *orden parcial*	R reflexiva, transitiva, antisimétrica	.|. : nat $\leftrightarrow$ nat a|b $\equiv$ ($\exists$d|: b = d*a)
R *orden total*	R orden parcial $\wedge$ ($\forall$a,b|: aRb $\vee$ bRa)	$.\leq. : \text{nat} \leftrightarrow \text{nat}$

La siguiente tabla establece, en la segunda columna, la definición del concepto correspondiente listado en la primera columna, para una relación $R: A\leftrightarrow A$. En la tercera columna se presenta una formulación alternativa equivalente a la definición (resultados que pueden demostrarse con teoría de conjuntos):

Propiedad	*Definición*	*Alternativa*
R reflexiva	xRx	$I\subseteq R$
R irreflexiva	$\neg$(xRx)	$I\cap R = \varnothing$
R simétrica	xRy $\equiv$ yRx	$R = R^T$
R antisimétrica	xRy $\wedge$ yRx $\Rightarrow$ x=y	$R \cap R^T \subseteq I$
R asimétrica	xRy $\Rightarrow$ $\neg$(yRx)	$R \cap R^T = \varnothing$

R transitiva	$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	$R^2 \subseteq R$

La demostraciones de que las fórmulas de la tercera columna equivalen a las definiciones de la segunda columna son relativamente fáciles de entender y recordar. La caracterización de la transitividad puede ser una excepción a lo anterior. A continuación se explica por qué es así:

$$
\begin{array}{ll}
 & R \text{ transitiva} \\
= & \quad \langle \text{Def transitividad} \rangle \\
 & xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \\
= & \quad \langle \text{Generalización} \rangle \\
 & (\forall x,y,z|: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz) \\
= & \quad \langle \text{Def} \Rightarrow, \text{De Morgan} \rangle \\
 & (\forall x,y,z|: \neg xRy \vee \neg yRz \vee xRz) \\
= & \quad \langle \text{Anidamiento} \rangle \\
 & (\forall x,z|: (\forall y|: \neg xRy \vee \neg yRz \vee xRz)) \\
= & \quad \langle xRz \text{ no depende de } y\text{: Distr. } \vee/\forall \rangle \\
 & (\forall x,z|: (\forall y|: \neg xRy \vee \neg yRz) \vee xRz) \\
= & \quad \langle \text{De Morgan} \rangle \\
 & (\forall x,z|: (\forall y|: \neg(xRy \wedge yRz)) \vee xRz) \\
= & \quad \langle \text{De Morgan Gral} \rangle \\
 & (\forall x,z|: \neg(\exists y|:(xRy \wedge yRz) \vee xRz)) \\
= & \quad \langle \text{Def} \Rightarrow \rangle \\
 & (\forall x,z|: (\exists y|: xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)) \\
= & \quad \langle \text{Def } R^2 \rangle \\
 & (\forall x,z|: xR^2z \Rightarrow xRz) \\
= & \quad \langle \text{Def} \subseteq \rangle \\
 & R^2 \subseteq R
\end{array}
$$

6.4 CLAUSURAS

Dada una relación $R: A \leftrightarrow A$, va a resultar útil buscar la relación más pequeña que contiene a R y que, a su vez, tiene una propiedad específica, como ser simétrica, transitiva, etc. Una tal relación es una clausura-Φ, si Φ es la propiedad que se desea.

Def A:

Clausura reflexiva : $r(R) = I \cup R$

Clausura simétrica : $s(R) = R \cup R^T$

Clausura transitiva : $R^+ = (\cup i|\ 0<i : R)$

Clausura transitiva-reflexiva : $R^* = (\cup i|\ 0 \leq i : R)$

[]

Con demostraciones más bien técnicas, se puede comprobar que:

- $r(R)$ es la relación reflexiva más pequeña que contiene a R.
- $s(R)$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a R.
- R^+ es la relación transitiva más pequeña que contiene a R.
- R^* es la relación transitiva y reflexiva más pequeña que contiene a R.

Ejemplo A

Supóngase conocido un dominio `P = 0..n-1`, una *comunidad* compuesta por `n>0` personas, denominadas `0,1,…,n-1`. Sobre `P`, supónganse conocida las relación

$$\texttt{Hijo: P} \leftrightarrow \texttt{P}$$

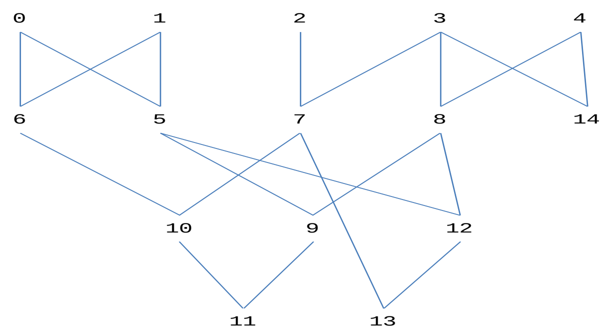
tal que

$$\texttt{Hijo(a,b)} \approx \texttt{"a} \text{ es hijo de } \texttt{b".}$$

Dado a, un miembro de la comunidad, se quieren resolver las siguientes preguntas alrededor de relaciones de familia y de edad entre a y la comunidad:

- `padres.a` : el conjunto de los padres de a.
- `hnos.a` : el conjunto de las hermanos de a (hijo de uno de los padres de a, diferente de a)
- `tios.a` : el conjunto de los tíos de a (hijos de un hermano del padre de a)
- `phnos.a` : el conjunto de los primos hermanos de a (hijos de un tío de a)
- `ancs.a` : el conjunto de los *ancestros* de a (padres, abuelos, bisabulelos, … de a)
- `descs.a` : el conjunto de los *descendientes* de a (hijos, nietos, bisnietos, … de a)

La relación `Hijo` se puede describir con el siguiente grafo dirigido, en el que los arcos representan relación de arriba abajo. Por ejemplo, cuando `n=15`, la familia puede tener las siguientes relaciones `(Hijo = {(6,0),(6,1),(5,0),(5,1),…})`:



entonces:

```
padres.10   = {6,7}
hnos.10     = {13}
tios.10     = {5,8,14}
phnos.10    = {9,12}
ancs.10     = {0,1,2,3,6,7}
descs.10    = {11}
```

Para cada una de estas relaciones, se puede establecer si la relación es 1-1, sobre, función, etc.

Nótese que:

```
padres(a)   = {x| Hijo(a,x)}
hnos(a)     = {x| x≠a ∧ (∃p|: Hijo(a,p) ∧ Hijo(x,p))}
tios(a)     = {x| (∃p|: p∈padres.a ∧ x∈hnos.p)}
```

etc.

También:

```
padre: P ↔ P
padre(a,b)  ≡  Hijo(b,a)
```

Es decir:
padre = Hijo^T

hno: P ↔ P
hno(a,b) ≡ a≠b ∧ (∃p|: Hijo(a,p) ∧ Hijo(b,p))
≡ Neq(a,b) ∧ (∃p|: Hijo(a,p) ∧ Hijo^T(p,b)) // NEq = .≠.
≡ Neq(a,b) ∧ (Hijo^T ∘ Hijo)(a,b)
≡ (Neq ∩ (Hijo^T ∘ Hijo))(a,b)

Es decir:
hno = Neq ∩ (Hijo^T ∘ Hijo)

Observaciones como la anterior dan lugar a considerar métodos de responder preguntas sobre relaciones que se basen en manipulaciones algebraicas y tablas (usando la representación de las relaciones). Este es el fundamento de las llamadas *bases de datos relacionales*.

Para ilustrar la idea anterior, si se quisiera saber si 10 es hermano de 9, habría que averiguar si hno(10,9) se cumple. Para hacer esto se puede

- comprobar que Neq(10,9), ya que 10≠9;
- calcular el producto Hijo^T ∘ Hijo;
- comprobar que ¬(Hijo^T ° Hijo)(10,9);
- responder: no.

[]

6.5 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Las relaciones de equivalencia reflejan el hecho de que dos objetos tengan un mismo valor con respecto a una propiedad dada. Permiten clasificar objetos en conjuntos que tengan la misma propiedad.

Def: R: A ↔ A es *equivalencia* ≡ R reflexiva, simétrica y transitiva

[]

Una relación de equivalencia cumple tres propiedades que pueden recordarse pensando en una relación de igualdad, que es claramente una equivalencia. Sin embargo, como se verá, hay muchas más equivalencias que no son igualdades, en el sentido de que relacionan objetos que se consideran equivalentes sin ser iguales[2].

Ejemplo A

Los siguientes son ejemplos de relaciones de equivalencia.

a .=. : A ↔ A
La igualdad es la relación de equivalencia por excelencia. Note que otra notación para la igualdad es la de la identidad I: A ↔ A.

b R: int ↔ int
xRy ≡ x=y ∨ x=-y

[2] De hecho, la igualdad es una condición más fuerte. Por ejemplo, la regla de Leibniz permite cambiar "iguales por iguales", de modo que una cosa se puede cambiar por otra igual sin que nada que se diga sobre la primera (falso o verdadero) cambie de valor de verdad. Esto no va a ser necesariamente cierto, en el caso de una equivalencia.

c $S: real \leftrightarrow real$
$xSy \equiv (x\text{-}y) \in int$

d $P: int \leftrightarrow int$
$xPy \equiv par(x\text{-}y)$

[]

Def A: Sea $R: A \leftrightarrow A$ relación de equivalencia. Para $a \in A$ se define

$[a]_R = \{x:A|\ aRx\}$: (R-) *clase de equivalencia* de a.

Se omite el subíndice en la notación y se denota $[a]$, si es claro de cuál R se trata.

[]

Nótese que toda clase de equivalencia tiene, al menos, un elemento. Claramente:

$$(\cup a|:[a]) = A.$$

Las clases de equivalencia cumplen las siguientes propiedades:

Teo B: Sea $R: A \leftrightarrow A$ equivalencia. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a aRb
b $[a] \cap [b] \neq \emptyset$
c $[a] = [b]$

Dem: Se omite.

[]

El teorema afirma que dos elementos están relacionados por una equivalencia si y solo si pertenecen a la misma clase de equivalencia. Las clases de equivalencia, de hecho, forman una *partición* del conjunto en que se definen, en el sentido de la siguiente definición.

Def C: Sea A conjunto. $\mathbf{P} \subseteq 2^A$ es una *partición de* A si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

a $(\cup B:\mathbf{P}|:\ B) = A$
b $(\forall B_1,B_2:\mathbf{P}|\ B_1 \neq B_2 : B_1 \cap B_2 = \emptyset)$

[]

Entonces:

- Las clases de equivalencia de una relación de equivalencia $R: A \leftrightarrow A$ son una partición de A.
- Dada una partición $\mathbf{P}$ de un conjunto A, la relación $E: A \leftrightarrow A$, definida por

$$E(x,y) \equiv (\exists B:\mathbf{P}|:\ x \in B \wedge y \in B)$$

es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de E son los elementos de $\mathbf{P}$.

Ejemplo B

A continuación se establece la forma de las clases de equivalencia para las relaciones del Ejemplo A.

a $.=.\ : A \leftrightarrow A$
$[a] = \{b|\ a=b\} = \{a\}.$

b $R: int \leftrightarrow int$
$xRy \equiv x=y \vee x=-y$
$[x] = \{y|\ x=y \vee x=-y\} = \{-x,x\}$

c $S: real \leftrightarrow real$

$xSy \equiv (x-y) \in int$
$[x] = \{y: real \mid x-y \in int\} = \{y:real \mid (\exists k:int \mid : y = x-\lfloor x \rfloor + k)\}$

d $P: int \leftrightarrow int$
$xPy \equiv par(x-y)$
$[x] = \{y:int \mid par.y \equiv par.x\}$

[]

6.6 RELACIONES DE ORDEN

Def A:

a Una relación $\preccurlyeq: A \leftrightarrow A$ es *orden parcial* si $\preccurlyeq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
En este caso, $(A,\preccurlyeq)$ es un conjunto parcialmente ordenado (inglés: *poset*).

b $\prec : A \leftrightarrow A$ es *orden estricto* si $\prec$ es irreflexiva y transitiva.

[]

Las anteriores definiciones de relaciones de orden se pueden recordar si se piensa en las relaciones $\leq$ y $<$ definidas sobre números naturales. Sin embargo, se verá que el concepto de orden parcial que aquí se define es más general que el del orden en los números naturales.

Los siguientes resultados son demostrables a partir de las definiciones:
- $\preccurlyeq$ orden parcial $\equiv (\preccurlyeq \cap \neq)$ orden estricto
- $\prec$ orden estricto $\equiv (\prec \cup =)$ orden parcial

Se usa la notación $\prec$ para $(\preccurlyeq \cap \neq)$. En este caso, $\prec$ se llama el orden estricto correspondiente a $\preccurlyeq$.

Se usa la notación $\preccurlyeq$ para $(\prec \cup =)$. En este caso, $\preccurlyeq$ se llama el orden parcial correspondiente a $\prec$.

La transpuesta de un orden parcial es un orden parcial. La transpuesta de un orden estricto es un orden estricto. Se usan las notaciones: $\succ$ para $\prec^T$, y $\succcurlyeq$ para $\preccurlyeq^T$.

Ejemplo A

a $.\leq.: real \leftrightarrow real$ es un orden parcial;
$.<.: real \leftrightarrow real$ es el orden estricto correspondiente.

b $.\subseteq.: 2^A \leftrightarrow 2^A$ es un orden parcial sobre los subconjuntos de A;
$.\subset.: 2^A \leftrightarrow 2^A$ es el orden estricto correspondiente.

[]

Una de las diferencias entre un conjunto parcialmente ordenado $(A,\preccurlyeq)$, en general, con el orden de los números naturales $(nat,\leq)$, es que en este último siempre se pueden comparar dos números para saber si uno es menor o igual al otro o viceversa. Esto no es así en general. Por ejemplo, en el caso de $(2^A,\subseteq)$, dados dos subconjuntos de A, no tiene que estar contenido uno en el otro.

Def B: Si $(A,\preccurlyeq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, $x, y \in A$:

a x, y son *comparables* $\equiv x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

b R es *orden total* $\equiv (\forall x,y \mid : x,y \text{ comparables})$

[]

Def C: Si $(A,\prec_A)$, $(B,\prec_B)$ son conjuntos estrictamente ordenados, se define el orden estricto

$\prec_{lex}$: $A \times B \leftrightarrow A \times B$

de modo que

$(x,y) \prec_{lex} (w,z) \quad \equiv \; x \prec_A w \vee (x=w \wedge y \prec_B w)$

Entonces, $\prec_{lex}$ es el *orden lexicográfico* definido a partir de los órdenes en las componentes. El orden parcial lexicográfico correspondiente es $\preccurlyeq_{lex}$.

[]

Def D: Sea $(A,\preccurlyeq)$ un conjunto parcialmente ordenado.

a Una *cadena descendente de tamaño* n es un conjunto $\{a_k | 0 \le k<n\}$, tal que: $a_0 \succ a_1 \succ \ldots \succ a_{n-1}$.

b Una *cadena descendente infinita* es un conjunto $\{a_k | k \in \mathbf{nat}\}$, tal que: $a_0 \succ a_1 \succ \ldots \succ a_k \succ a_{k+1} \succ \ldots$

c $(A,\prec)$ es un *orden bien fundado* (*obf*) si no tiene cadenas descendentes infinitas.

[]

Ejemplo B

Los siguientes son ejemplos de órdenes bien fundados:

a $(\mathbf{nat},\le)$.

b $(\mathbf{nat}^+,|)$, donde
$\mathbf{nat}^+ = \{n:\mathbf{nat} | \; n>0\}$
$q|p \equiv (\exists d:\mathbf{nat}|: \; q*d = p)$
Nótese que $q|p$ cuando p es un múltiplo de q.

c $(2^A,\subseteq)$, si A es un conjunto finito.

d $(A \times B,\preccurlyeq_{lex})$, si $(A,\preccurlyeq_A)$, $(B,\preccurlyeq_B)$ son obfs.

Los siguientes son ejemplos de órdenes que no son bien fundados:

e $(\mathbf{int},\le)$

f $(\mathbf{real},\le)$

g $(2^A,\subseteq)$, si A es un conjunto infinito.

[]

6.7 FUNCIONES

Las *funciones parciales* son relaciones unívocas, i.e., donde cada elemento del dominio está relacionado a lo sumo con un elemento del rango. Las *funciones totales*, también llamadas simplemente *funciones* son funciones parciales cuyo dominio coincide con todo el conjunto de salida de la relación.

La notación para funciones varía con respecto a la de las relaciones. Se usa:

$$f: A \rightarrow B$$

f *función parcial de* A *en* B $\quad \equiv \quad f: A \leftrightarrow B \;\; \wedge \;\; f$ unívoca

`f` *función (total) de* `A` *en* `B` $\equiv$ `f` *función parcial de* `A` *en* `B` $\land$ `f` total
$\equiv$ `f: A ↔ B` $\land$ `f` unívoca $\land$ `f` total

Una función `f: A → B` describe una correspondencia entre los elementos de un conjunto `A`, el *dominio* de la función y un conjunto `B`, llamado el *codominio* de la función. En lugar de la notación relacional `afb` o `(a,b)`$\in$`f`, se escribe, aprovechando que la imagen de a es única:

`f(a) = b`

y también (si `A` no es un producto cartesiano)

`f.a = b`

o incluso

`f a = b`

La descripción de la correspondencia puede usar reglas sencillas, tablas, recurrencias, etc.

Ejemplo A

Los siguientes son ejemplos de funciones:

```
a  f: nat → nat
      x  ↦  x+1

b  ∧: Bool × Bool→  Bool
        (p,q)  ↦  if p then q else false fi

c  va : {a,e,i,o,u} →  Bool
             a     ↦ true
             e     ↦ true
             i     ↦ false
             o     ↦ false
             u     ↦ false

d  F: nat → nat
   F.0 = 0
   F.1 = 1
   F.n = F(n-2)+F(n-1), n≥2.
```

□

6.7.1 Composición funcional

Como relaciones que son, las funciones pueden componerse (cf. 6.2).

Es fácil ver que la composición de relaciones unívocas es unívoca. Es decir, la composición de funciones parciales es una función parcial. Esto vale también para las relaciones totales. Resumiendo:

- la composición de funciones parciales es una función parcial.
- la composición de funciones es una función.

Si se tienen dos funciones

```
f: A → B
g: B → C
```

Para `x`$\in$`dom f`:

```
(x,f.x) ∈ f
(f.x,g(f.x)) ∈ g.
```

Y entonces:

$$(x,g(f.x)) \in f{\circ}g.$$

Así que la función

$$f{\circ}g\colon A \to C$$

es tal que

$$(f{\circ}g).x = g(f.x).$$

La notación relacional no parece práctica para componer funciones. En cambio, se prefiere denotar, cuando se trata de composición funcional:

$$g{\bullet}f\colon A \to C$$

de modo que

$$g{\bullet}f = f{\circ}g.$$

Y entonces:

$$(g{\bullet}f).x = g(f.x)$$

El operador $\bullet$ se suele omitir, y se escribe gf para significar $g{\bullet}f$.

Gráficamente, la composición funcional se puede ilustrar con un diagrama de la forma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

6.7.2 Secuencias y sucesiones

Para recordar:

dados dos conjuntos A, B se ha definido el *producto cartesiano*

$$A \times B = \{(a,b) \mid a{\in}A \wedge b{\in}B\}$$

Se generaliza a un número n de conjuntos, $n{\geq}0$, así:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid (\forall i \mid 1{\leq}i{\leq}n : a_i{\in}A_i)\}$$

Los elementos de un producto cartesiano de n conjuntos son n-*tuplas*. En una tupla importa el orden de los elementos y siempre hay n elementos mencionados (incluso, si hay repeticiones).

Cuando los conjuntos que participan en un n-producto cartesiano son todos iguales, digamos A, el producto se denota A^n.

Def A : Una n-*secuencia* de elementos de A es un elemento de A^n.

[]

Def B: Una n-*secuencia* de elementos de A es una función $f\colon \{k{:}\mathbf{nat} \mid 0{\leq}i{<}n\} \to A$

[]

Las dos definiciones son equivalentes (cada una representa la otra). En vez de la notación de tuplas, usando paréntesis corrientes, se acostumbra usar

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$$

para enfatizar que se habla de una secuencia.

Se denota
`Seq[A]` : el conjunto de las secuencias sobre A.

Una 0-secuencia de elementos de A es la secuencia *vacía* (de A). Se denota $\langle\rangle$ o también ε (y en otros textos, λ).

Def C: Una *sucesión* x sobre A es una función x: **nat** $\to$ A.

[]

6.7.2.1 Operaciones sobre secuencias / sucesiones

`Seq[A]` se puede definir recursivamente. La siguiente notación indica cómo puede hacerse esto de manera sistemática[3]:

```
TAD Seq[A]
* ε   :          → Seq       // una constante
* .◁. : A × Seq  → Seq       // prepend, añadir por atrás
```

Parecería que esta fuera una definición con problemas, porque está definiendo secuencias suponiendo que ya se tiene un conjunto de secuencias para describir las imágenes de ε y $\triangleleft$. En realidad, se quiere decir lo siguiente:

$$Seq_0 = \{\varepsilon\}$$
$$Seq_{n+1} = Seq_n \cup \{s \mid s = a \triangleleft s_n,\ a \in A,\ s_n \in Seq_n\},\ n \geq 0$$
$$Seq = (\cup n \mid : Seq_n)$$

Nótese que la secuencia $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ se puede denotar con

$$a_1 \triangleleft (a_2 \triangleleft \dots \triangleleft (a_n \triangleleft \varepsilon) \dots)$$

y, por convención, escribir esto como

$$a_1 \triangleleft a_2 \triangleleft \dots \triangleleft a_n \triangleleft \varepsilon\ .$$

O sea, se tiene una representación para cualquier secuencia de A, en términos de ε y $\triangleleft$.

Ahora, se pueden añadir operaciones definidas de la siguiente forma:

```
head: Seq A → A
head(a◁s) = a

tail: Seq A → Seq A
tail(ε) = ε
tail(a◁s) = s
```

---

[3] Se define el `TAD Seq[A]` (tipo abstracto de datos). Esta es una construcción de una estructura de datos que define un conjunto de objetos y operaciones sobre él. Es una definición matemática de una clase, sus objetos y sus operaciones.

```
isempty: Seq A → bool
isempty(ε)
isempty(a◁s) = false

last: Seq A → A
last(a◁s) = if isempty(s) then a else last(s) fi

size: Seq A → nat
size(ε) = 0
size(a◁s) = size(s) + 1

^ : Seq A × Seq A → Seq A
ε^t = t
(a◁s)^t = a◁(s^t)
```

Obsérvese que las operaciones definidas son funciones parciales, en general. Y, en muchos casos, se trata de funciones. Por ejemplo, no se define `head(ε)`, por lo que `head` es función parcial. Sin embargo, `tail` e `isempty` sí están definidas unívocamente para toda posible secuencia, de modo que son funciones.