

9 CONTEO

Un problema de conteo consiste en, dado un conjunto, determinar el número de sus elementos. El conjunto se supone finito, aunque hay teorías interesantes para contar conjuntos infinitos. La teoría de conteo también se conoce como *Combinatoria*.

Recuérdese que un conjunto S es *finito* cuando es vacío cuando existe un número natural $n > 0$ y una biyección $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow S$. En el primer caso, el *tamaño* de S se define como 0 y, en el segundo, como n .

El tamaño de S se denota $\#S$. La *cardinalidad* de S es otra denominación para su tamaño.

Lo anterior permite concluir que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos si los dos son vacíos o si hay una biyección entre ellos.

Así, para probar que un conjunto tiene n elementos se puede

- encontrar una manera de contarlos $1, 2, 3, \dots, n$.
- encontrar una correspondencia biunívoca con un conjunto del que se sepa que tiene n elementos.

9.1 REGLAS DE CONTEO

Hay tres reglas básicas muy útiles para calcular el tamaño de un conjunto, si se tiene claro que este sea una unión disyunta de subconjuntos, un producto cartesiano o una diferencia de conjuntos. La idea es determinar el tamaño del conjunto con base en los tamaños de sus constituyentes. Las tres reglas son demostrables a partir de las definiciones, pero sus pruebas se omiten aquí.

Regla de suma

El tamaño de una unión de un número finito de conjuntos finitos, disyuntos por pares, es la suma de los tamaños de los conjuntos, i.e.,

$$(\forall i, j \mid 0 \leq i < j < n : S_i \cap S_j = \emptyset) \Rightarrow \#(\cup i \mid 0 \leq i < n : S_i) = (\sum i \mid 0 \leq i < n : \#S_i)$$

□

Por ejemplo, supóngase que una tarea se puede realizar mediante cualquiera de dos procedimientos, digamos 1 y 2, cada uno de los cuales se puede completar de n_i maneras, $i=1, 2$. Entonces el número de maneras de realizar la tarea es n_1+n_2 .

Regla de producto

El tamaño del producto cartesiano de un número finito de conjuntos finitos, es el producto de los tamaños de los conjuntos, i.e.,

$$\#(\prod i \mid 0 \leq i < n : S_i) = (\prod i \mid 0 \leq i < n : \#S_i)$$

□

Por ejemplo, supóngase que una tarea se debe realizar efectuando dos procedimientos, digamos 1 y 2, y la ejecución de 2 solo puede empezar si 1 termina. Si cada uno de los procedimientos se puede efectuar de n_i maneras, $i=1, 2$, cada forma de realizar la tarea se puede codificar con una pareja

$\langle \text{manera}_1, \text{manera}_2 \rangle$, donde manera_i es una forma de realizar el procedimiento i . Entonces, el número de formas de completar la tarea es $n_1 * n_2$.

Regla de diferencia:

El tamaño de un conjunto al que se le ha removido un subconjunto es el tamaño del conjunto original menos el del subconjunto:

$$T \subseteq S \Rightarrow \#(S \setminus T) = \#S - \#T$$

□

Ejercicios 9.1

- 1 Justifique las reglas de conteo que se han descrito en el texto.
- 2 Demuestre que, para contar los elementos en una unión de dos conjuntos finitos, vale la siguiente regla:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

- 3 Demuestre que, para contar los elementos en una unión de tres conjuntos finitos, vale la siguiente regla:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(C \cap A) + \#(A \cap B \cap C)$$

- 4 Una generalización de los dos ejercicios anteriores (llamada el *Principio de Inclusión-Exclusión*) permite contar los elementos de una unión finita de conjuntos finitos. Plantee y demuestre una versión de este principio.

9.2 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

La teoría de conteo incluye el saber contar ciertas colecciones definidas a partir de un conjunto conocido que sirve de base para construir las. En cada una de estas colecciones puede importar o no el orden o la repetición de elementos; cada variante dará lugar a una estructura matemática conveniente.

9.2.1 Permutaciones de un conjunto

Definición A

- (i) Una *permutación* de un conjunto A es una biyección con un segmento inicial¹ de \mathbf{nat} . Se puede representar con una secuencia o con una sucesión, dependiendo de que A sea finito o infinito, respectivamente. Sea $\text{Perm}(A)$ el conjunto de las permutaciones del conjunto A . En el caso finito, si $\#A=n$:

$$\text{Perm}(A) = \{\pi: 1..n \rightarrow A \mid \pi \text{ 1-1}\}.$$

- (ii) Una *r-permutación* de un conjunto de n elementos es una secuencia de r de los elementos del conjunto, todos diferentes. Sea $\text{Perm}_r(A)$ el conjunto de las r -permutaciones del conjunto A . Entonces:

$$\text{Perm}_r(A) = \{\pi: 1..r \rightarrow A \mid \pi \text{ 1-1}\}.$$

Obsérvese que, si $\#A=n$, $\text{Perm}(A) = \text{Perm}_n(A)$.

¹ Un segmento inicial de \mathbf{nat} es \mathbf{nat} o es un intervalo $0..n-1$, para algún $n \in \mathbf{nat}$.

(iii) Una r -permutación con repetición de un conjunto de n elementos es una secuencia de r de los elementos del conjunto. Sea $\text{Perm}_r^*(A)$ el conjunto de las r -permutaciones con repeticiones del conjunto A . Entonces:

$$\text{Perm}_r^*(A) = 1..r \rightarrow A$$

□

En una permutación, el orden en que se listan sus elementos es importante. Por ejemplo, si $S = \{1, 2, 3\}$ hay 6 diferentes permutaciones de los elementos de S :

$$\langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 1, 3, 2 \rangle, \langle 2, 1, 3 \rangle, \langle 2, 3, 1 \rangle, \langle 3, 1, 2 \rangle, \langle 3, 2, 1 \rangle.$$

Cuando $\#A = n$, para $n \in \mathbf{nat}$, se usarán las siguientes notaciones para los tamaños de los conjuntos de definidos, así:

$$\#\text{Perm}_r(A) = P(n, r)$$

$$\#\text{Perm}_r^*(A) = P^*(n, r).$$

En la siguiente discusión, supóngase $\#A = n$, para cierto $n \in \mathbf{nat}$.

$P(n, r)$ es fácil de calcular. La idea es observar que cada r -permutación $\pi \in \text{Perm}_r(A)$ es una función inyectiva, tal que $1..r \rightarrow A$. Entonces, $\pi.1$ puede ser cualquiera de los n elementos de A y, una vez elegido uno, $\pi.2$ solo tiene $n-1$ maneras de ser elegido, y así se puede continuar hasta asignar la imagen de r . Para $1 \leq k \leq r$, $\pi.k$ se puede elegir de $n-k$ maneras, y la Regla de Producto permite concluir que

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Y en particular, si $r = n$:

$$\#\text{Perm}(A) = n!.$$

El cálculo de $P^*(n, r)$ es más fácil, porque solo hay que contar cuántas funciones hay de $1..r$ en A . No hay ninguna restricción para asignar imágenes, y siempre hay n posibilidades, i.e.,

$$P^*(n, r) = n^r.$$

La discusión anterior permite afirmar el resultado:

Teorema B

Supóngase A tal que $\#A = n$. Entonces:

a $\#\text{Perm}(A) = n!$

b $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

c $P^*(n, r) = n^r.$

□

Ejemplo A

En el juego de *Famas y Picas* un jugador elige un número entero n , con $0 < n < 10^4$, en notación decimal. Hay dos versiones del juego:

- (1) En el número n no hay dígitos repetidos.
- (2) En el número n puede haber dígitos repetidos².

¿Cuántas maneras hay de elegir el número n , en cada versión del juego?

² El juego comercialmente conocido como *Mastermind* tiene reglas similares a la versión 2.

En la versión 1 se deben elegir 4 dígitos decimales (para que n esté entre 0 y 10^4) diferentes, entre 10 posibles. En otras palabras, cada n es una 4-permutación de un conjunto de 10 elementos:

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = 7*8*9*10 = 5040.$$

En la versión 2 también se deben elegir 4 dígitos decimales, pero no tienen que ser diferentes. En este caso cada n es una 4-permutación con repetición de un conjunto de 10:

$$P^*(10,4) = 10^4 = 10000.$$

□

9.2.2 Bolsas y permutaciones de una bolsa

Una *bolsa* o *multiconjunto* es una estructura de datos en la que los elementos pueden aparecer repetidos.

Una forma de representar bolsas con estructuras ya conocidas es definir el conjunto de las bolsas de elementos de un conjunto A como el conjunto potencia $\mathcal{P}(A \times \mathbb{N}^+)$. Por ejemplo, si $A = \mathbb{N}$, una posible bolsa sería el conjunto

$$\{(4,2), (0,1), (1,2)\}$$

que podría interpretarse como una estructura de datos con dos repeticiones de 4, una de 0 y dos de 1. En la literatura se usan notaciones propias para bolsas, análogas a las de conjuntos. La anterior bolsa se podría denotar de alguna de las dos maneras siguientes:

$$\{x:\mathbb{N} \mid -2 \leq x \leq 2 : x^2\}$$

$$\{4,1,0,1,4\}$$

Una *permutación de una bolsa* es una secuencia de los elementos de la bolsa. Como hay elementos repetidos, hay menos permutaciones de una bolsa de tamaño n que las que hay en un conjunto de n elementos.

Ejemplo A

Considérense el conjunto $S = \{m,a,r\}$ y la bolsa $B = \{a,m,a\}$. Aunque las dos estructuras de datos tienen 3 elementos, S tiene $3! = 6$ permutaciones:

mar, mra, arm, amr, ram, rma

pero B tiene solo 3 permutaciones:

ama, aam, maa.

□

Definición B

El *coeficiente multinomial* se define por:

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \ n_2! \ \dots \ n_k!}$$

para $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, $0 \leq n_1, n_2, \dots, n_k \leq n$.

□

Teorema C

El número de permutaciones de una bolsa de tamaño n , en la que hay k elementos diferentes, con multiplicidades n_i , $1 \leq i \leq k$ es³

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}$$

Dem: Inducción sobre k , cf. [Gri1994].

□

Ejemplo B

¿Cuántos números enteros de 4 cifras se pueden escribir con los dígitos de 1994?

En este caso:

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ k &= 3, \ n_1 = 1, \ n_2 = 2, \ n_3 = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, se pueden escribir:

$$\binom{4}{1 \ 2 \ 1} = \frac{4!}{1!2!1!} = \frac{24}{2} = 12.$$

Los números son:

$$1499, 1949, 1994, 4199, 4919, 4991, 9149, 9194, 9419, 9491, 9914, 9941.$$

□

9.2.3 Combinaciones de un conjunto

Una r -combinación de un conjunto de n elementos es un subconjunto de tamaño r , $0 \leq r \leq n$.

El conjunto de las r -combinaciones de un conjunto A es

$$\text{Comb}_r(A) = \{B: 2^A \mid \#B=r\}.$$

Definición A

El *coeficiente binomial* $\binom{n}{r}$ (se lee "de n , r ") se define por: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, para $0 \leq r \leq n$.

□

El número de r -permutaciones $P(n, r)$ cuenta como diferentes $r!$ combinaciones. Es decir, el número de r -combinaciones es

$$\text{Comb}(n, r) = P(n, r) / r!.$$

Teorema B

$$\text{Comb}_r(n) = \binom{n}{r}$$

□

³ $n = (\sum_{1 \leq i \leq k} n_i)$.

Teorema C

El número de r -combinaciones de n elementos es igual al número de permutaciones de una bolsa de tamaño n con dos clases de elementos, una de las cuales tiene multiplicidad r .

Dem:

Nótese que:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r \quad n-r}$$

□

9.2.4 Combinaciones con repetición de un conjunto

Una r -combinación con repetición de un conjunto de n elementos es una bolsa de tamaño r , cuyos elementos están en el conjunto.

Ejemplo A

El número de 4-combinaciones con repetición de los dígitos binarios $\{0,1\}$ son 5:

$$\{0,0,0,0\}, \{0,0,0,1\}, \{0,0,1,1\}, \{0,1,1,1\}, \{1,1,1,1\}$$

Para comparar, las 4-permutaciones con repeticiones sobre $\{0,1\}$ son $2^4 = 16$. Corresponden a la notación binaria de los números entre 0 y 15.

□

Teorema B

El número de r -combinaciones con repetición de un conjunto de n elementos es

$$\text{Comb}^*(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$$

Dem: cf. [Gri1993].

□

Ejemplo B

Si 4 personas ordenan en un restaurante uno de 2 menús ¿cuántas posibles órdenes hay?

Aquí, una orden son 4 elementos, cada uno elegido entre 2 posibles, i.e., 4-combinaciones de un conjunto de tamaño 2. Son:

$$\binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = 5$$

□

9.3 PROPIEDADES DE BINOMIALES

Los coeficientes binomiales aparecen en numerosas fórmulas matemáticas y en resultados de conteos. Cumplen, además, muchas propiedades que facilitan su cálculo y transformación. El siguiente teorema menciona algunas de estas propiedades.

Teorema A (propiedades del coeficiente binomial)

- a $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$, $0 \leq r \leq n$ [simetría]
- b $\binom{n}{r} = \frac{n}{r} \binom{n-1}{r-1}$, $0 < r \leq n$ [absorción]
- c $r * \binom{n}{r} = n * \binom{n-1}{r-1}$, $0 < r \leq n$ [absorción]
- d $(n-r) * \binom{n}{r} = n * \binom{n-1}{r}$, $0 < r \leq n$
- e $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$, $0 < r < n$ [suma]
- f $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, $0 \leq n$
- g $\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$, $0 \leq k \leq r \leq n$

Dem:

Las demostraciones de muchas de las propiedades se basan en la definición del coeficiente binomial y en el uso de algunas anteriores en la lista.

La propiedad e permite representar los binomiales en el *triángulo de Pascal*. Se puede mostrar con argumentos de combinatoria o por inducción. También:

$$\begin{aligned}
 & \text{true} \\
 & = \text{⟨sumar miembro a miembro c con d; } 0 < r < n \text{⟩} \\
 & n * \binom{n}{r} = n * \binom{n-1}{r} + n * \binom{n-1}{r-1} \\
 & = \text{⟨factorizando y cancelando } n > 0 \text{⟩} \\
 & \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}
 \end{aligned}$$

□

9.3.1 El Teorema del binomio

Los coeficientes binomiales toman su nombre del papel que representan en la expansión de la n-si,a potencia del binomio x+y como un polinomio en las dos variables. A continuación, el resultado y una demostración combinatoria del mismo.

Teorema A (Teorema del binomio)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad , \quad 0 \leq n$$

Dem:

Obsérvese que el polinomio em dos variables que resulta de multiplicar n binomios

$$(x+y) * (x+y) * \dots * (x+y)$$

consta de términos de la forma $x^k y^{n-k}$, con $0 \leq k \leq n$. Si se piensa en realizar la multiplicación de los n binomios eligiendo de cada uno una x o una y, los términos $x^k y^{n-k}$ se producen al elegir k x's y, por consiguiente, n-k y's. Esto puede hacerse exactamente de $\binom{n}{k}$ maneras.

□

9.4 EJEMPLOS DE CONTEO⁴

Ejemplo A

¿Cuántas funciones $f: S \rightarrow T$ hay entre los conjuntos finitos S y T ?

Una función de S a T puede construirse definiendo $f.i$ para cada elemento $i \in S$. En cada caso hay $\#T$ posibilidades. Como son $\#S$ casos, hay $\#T^{\#S}$ funciones.

□

Ejemplo B

¿Cuántas funciones $f: S \rightarrow T$ 1-1 hay entre los conjuntos finitos S y T ?

Una función de S a T puede construirse definiendo $f.i$ para cada elemento $i \in S$. Sin pérdida de la generalidad, sean $S = \{1, 2, \dots, m\}$, $T = \{1, 2, \dots, n\}$.

Si $m > n$ no es posible tener funciones 1-1. Supóngase $m \leq n$. Se trata de elegir m elementos de n posibles, sin repetición. Es decir, hay $P(m, n) = n! / (n-m)!$ posibles funciones.

□

Ejemplo C

¿Cuántas permutaciones hay de las letras de $\langle \text{palabra} \rangle$?

La pregunta se refiere a resolver, de manera genérica, el acertijo de saber cuántos anagramas diferentes se pueden construir con las letras de una palabra específica.

Supóngase que $\#\langle \text{palabra} \rangle = n$. Supóngase que $\langle \text{palabra} \rangle$ tiene k letras diferentes y que la i -sima letra aparece n_i veces. Se trata de contar el número de permutaciones de una bolsa de tamaño n , i.e.,

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \ n_2! \ \dots \ n_k!}$$

Para el caso particular en el que todas las letras son diferentes, la respuesta es $n!$.

Así, los anagramas de *caso* son $4! = 24$. Los de *casa* son $4! / (1!2!1!) = 12$.

□

Ejemplo D

¿De cuántas maneras se pueden sentar n personas en una mesa redonda?

La pregunta debe entenderse definiendo como maneras distintas a diferentes ordenamientos circulares, sin importar el asiento específico de cada persona. Lo que importa es quiénes son sus vecinos.

Se pueden contar permutaciones, pero debe dividirse por n para "olvidar" el asiento en que se sienta la primera. Total: $(n-1)!$.

□

Ejemplo E

⁴ Varios de estos ejemplos son extraídos de [Gri1993].

¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra ALGORITHM tienen la A y la L seguidas (en cualquier orden)? ¿Cuántas tienen la A y la L separadas?

Idea: considerar $\{A, L\}$ como una letra. En total, así hay 8 letras y cada una aparece una vez. Según el Ejemplo C, hay $8!$ posibles permutaciones. Sin embargo la letra doble puede aparecer como AL o como LA. Por eso hay que multiplicar por 2 para contar dos veces cada aparición de la letra doble. En total:

$$8! \cdot 2 = 40320 \cdot 2 = 80640.$$

El total de permutaciones de ALGORITHM es $9! = 362880$. Las que que tiene separadas la A y la L son $362880 - 80640 = 282240$.

□

Ejemplo F

Suponga una ciudad cuadrículada, cuyas esquinas se denotan con números enteros en un plano cartesiano. ¿Cuántos caminos hay para ir de $(0, 0)$ a (m, n) , si solo se puede avanzar al este o al norte, una unidad cada vez?

Todo camino debe incluir m pasos al este y n pasos al norte, en cualquier orden. Así mismo, cualquier secuencia de $m+n$ pasos, algunos al norte, algunos al este, describe un camino de $(0, 0)$ a (m, n) . Es decir, basta contar permutaciones de una bolsa con m E's y n N's.

La respuesta es $(m+n)! / (m!n!)$.

□

Ejemplo G

Mostrar que $(2n)! / 2^n$ es un entero.

Lo es, porque corresponde al número de permutaciones de la bolsa $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$. Como resultado de un conteo, $(2n)! / 2^n$ debe ser un número entero.

(Claro, también es fácil hacer una prueba por inducción).

□

Ejemplo H

En la junta directiva de una empresa hay 5 hombres y 7 mujeres. ¿Cuántos comités de 4 se pueden formar, en los que hay una mujer?

Número de comités de 4 en los que no hay mujer: $\binom{5}{4} = 5$.

Número total de comités de 4: $\binom{12}{4} = 495$.

Número de comités de 4 en los que hay una mujer: $495 - 5 = 490$.

□

Ejemplo I

Para un conjunto finito S , el número de subconjuntos de S es $2^{\#S}$.

Supóngase que $S = \{a_0, a_1, \dots, a_{\#S-1}\}$. Los subconjuntos de S se pueden representar con números binarios de $\#S$ bits, numerados $0, 1, \dots, 2^{\#S}-1$. El bit i -simo es 1 si y solo si el subconjunto que se representa

contiene el elemento s_i , para $0 \leq i < n$. Nótese que esta correspondencia entre subconjuntos de S y números binarios de $\#S$ bits es biunívoca.

Es decir, hay tantos subconjuntos de S como números binarios de $\#S$ bits, i.e., $2^{\#S}$.

□

9.5 EL PRINCIPIO DEL PALOMAR

Si más de n palomas entran a un palomar con n casas (huecos) de palomas, al menos una casa tiene más de una paloma.

Este es el *principio del palomar*, también llamado *principio de Dirichlet*.

Otra forma de expresarlo:

Si más de n palomas entran a un palomar con n casas (huecos) de palomas, el máximo de palomas en una casa es mayor que 1.

Y una forma más:

Si el promedio de palomas por casa en un palomar es mayor que 1, el máximo de palomas en una casa es mayor que 1.

Las anteriores observaciones son fáciles de aceptar, aunque pueden probarse a partir de propiedades de los números enteros y reales. Lo interesante del principio es que sirve para probar la existencia de entidades que cumplen alguna propiedad, cuando se puede hacer una analogía de un proceso que interesa con el proceso de las palomas que llegan a un palomar con menos huecos que el número de palomas, como se describe arriba.

Es importante tener en cuenta que el principio del palomar afirma una existencia, pero no sirve para saber un testigo que la corrobore. Es lo que se llama una prueba no constructiva⁵.

El principio se puede enunciar en términos matemáticos. Para esto, se considera una bolsa S de números reales, que contenga los números de palomas en cada uno de los huecos del palomar, i.e.,

$$S = \{k_1, k_2, \dots, k_{\#S}\}$$

para la que se definen ($\#S > 0$, i.e., al menos hay una paloma):

$\text{prom.}S = (+x \mid x \in S : x) / \#S$: el *promedio* de los números en la bolsa;

$\text{max.}S = (\max x \mid x \in S : x)$: el *maximo* de los números en la bolsa.

Principio del palomar: En una bolsa no vacía S , de números reales:

$$\text{prom.}S \leq \text{max.}S$$

Dem:

$$\begin{aligned} & \text{prom.}S \\ = & \langle \text{Def prom} \rangle \\ & (+x \mid x \in S : x) / \#S \\ \leq & \langle x \in S \Rightarrow x \leq \text{max.}S \rangle \\ & (+x \mid x \in S : \text{max.}S) / \#S \end{aligned}$$

⁵ En este sentido, no es universalmente aceptada una prueba así. Los *constructivistas* solo aceptan afirmar existenciales en los que se puede exhibir un testigo que asevere la verdad del predicado correspondiente.

$$\begin{aligned}
&= \langle \max.S \text{ no depende de } x \rangle \\
&\quad \max.S * (+x \mid x \in S : 1) / \#S \\
&= \langle \text{Def } \#S \rangle \\
&\quad \max.S
\end{aligned}$$

□

Cuando en la bolsa solo hay números enteros se puede ser algo más fino:

Principio del palomar : En una bolsa no vacía S , de números enteros ($\lceil x \rceil$ es el entero más cercano a x , desde arriba):

$$\lceil \text{prom}.S \rceil \leq \max.S$$

Dem:

Según el resultado anterior, $\text{prom}.S \leq \max.S$. Es decir, $\max.S$ es un entero mayor o igual a $\text{prom}.S$, de manera que debe ser mayor o igual a $\lceil \text{prom}.S \rceil$.

□

9.5.1 Ejemplos del principio del palomar

En general, la idea al resolver un problema mediante el principio del palomar es establecer:

- No. de huecos, digamos, h .
- No. de palomas, digamos, p .

El principio del palomar se aplica a la bolsa S correspondiente, i.e., que almacena números reales que representan el número de palomas en cada hueco. Así, se establece que:

$$\max.S \geq \lceil \text{prom}.S \rceil = \lceil h/p \rceil$$

de modo que se concluye que hay un hueco (el que tiene el máximo) que recibe $\lceil h/p \rceil$ palomas o más.

Ejemplo A

Entre 8 personas, al menos dos nacieron el mismo día de la semana.

No. huecos : 7 días de la semana

No. palomas : 8 personas

Así:

$$\begin{aligned}
&\max.S \\
&\geq \lceil \text{prom}.S \rceil \\
&= \langle 8 \text{ palomas, } 7 \text{ huecos} \rangle \\
&\quad \lceil 8/7 \rceil \\
&= 2.
\end{aligned}$$

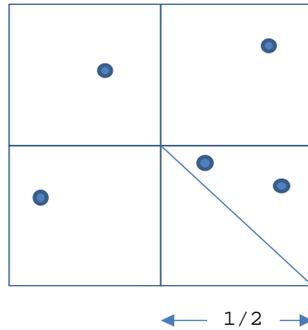
□

Ejemplo B

En un cuadrado de lado 1 se escogen 5 puntos cualesquiera. Entonces, al menos dos de los puntos está a una distancia igual o menor a $\sqrt{2}/2$.

Dem:

Si el cuadrado se divide en sus cuatro cuadrantes, cada uno de lado $\frac{1}{2}$, al menos uno de los cuadrantes debe tener dos de los puntos. Estos puntos están separados, a lo sumo, a una distancia igual a la diagonal del cuadrante, i.e. $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2}/2$:



□

Ejemplo C

Entre 85 personas, al menos 4 tienen la misma inicial de apellido.

No. huecos : 26 letras iniciales

No. palomas : 85 personas

Ahora:

$$\begin{aligned} & \max.S \\ & \geq \lceil \text{prom.S} \rceil \\ & = \lceil \langle 85 \text{ palomas}, 26 \text{ huecos} \rangle \rceil \\ & = \lceil 85/26 \rceil \\ & = 4. \end{aligned}$$

□

Ejemplo D

Entre 101 enteros elegidos en $1..200$, al menos uno divide a otro.

Cada entero se puede representar con un producto $2^k p$, con p impar. Para enteros en $1..200$, debe tenerse que $1 \leq p \leq 200$.

Nótese que:

$$\begin{aligned} & \{p:\mathbf{nat} \mid 1 \leq p \leq 200 \wedge \text{impar}.p : p\} \\ & = \{i:\mathbf{nat} \mid 0 \leq i \leq 99 : 2^{*i+1}\} \end{aligned}$$

Es decir, en $1..200$ solo hay 100 impares, que se pueden hacer corresponder biunívocamente con los números $0..99$.

Ahora:

No. huecos : 100 impares (o bien, números $i \in 0..99$, cada uno en correspondencia con 2^{*i+1})

No. palomas : 101 enteros en $1..200$

Así:

$$\begin{aligned} & \max . S \\ & \geq \lceil \text{prom. } S \rceil \\ & = \lceil \langle 101 \text{ palomas, } 100 \text{ huecos} \rangle \rceil \\ & = \lceil 101/100 \rceil \\ & = 2. \end{aligned}$$

i.e., hay al menos dos números $2^{p_i}, 2^{q_i} \in S$, con $1 \leq i \leq 200$, impar . i. Si $p \leq q$, entonces $2^p \mid 2^q$.

□

Ejemplo E

Se eligen 5 números diferentes del conjunto $1 \dots 8$. Probar que al menos un par suma 9.

Dem:

Los pares con suma 9 se pueden representar con bolsas:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{1, 8\} \\ P_2 &= \{2, 7\} \\ P_3 &= \{3, 6\} \\ P_4 &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

Sea C un subconjunto de 5 elementos de $1 \dots 8$.

No. huecos : 4 bolsas: P_1, \dots, P_4

No. palomas : 5 números (en $1 \dots 8$)

Así:

$$\begin{aligned} & \max . S \\ & \geq \lceil \text{prom. } S \rceil \\ & = \lceil \langle 4 \text{ huecos, } 5 \text{ palomas} \rangle \rceil \\ & = \lceil 4/5 \rceil \\ & = 2. \end{aligned}$$

□