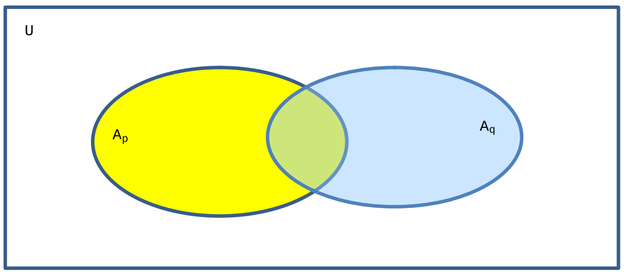
5 CONJUNTOS

La lógica y los conjuntos tienen conexiones más o menos evidentes. La semántica de las operaciones lógicas es usualmente explicada de manera informal con *diagramas de Venn-Euler*, una forma gráfica de visualizar conjuntos. Por ejemplo, si U es un universo de cuyos elementos se afirman proposiciones, se puede hablar de que, para una proposición p sea A_p la colección de los elementos de U que satisfacen p. Entonces es fácil entender diagramas como el siguiente, para mostrar los elementos que satisfacen dos proposiciones simultáneamente:



Nótese que $A_{p\wedge q}$, la colección de los elementos de U que satisfacen $p \wedge q$, se representa con la parte común entre A_p y A_q. En el lenguaje de los conjuntos, se habla de la intersección de A_p con A_q, de modo que

$$A_{p\wedge q} = A_p \cap A_q .$$

Esta es una de muchas relaciones interesantes que se presentan entre lógica y conjuntos que, a partir de las definiciones que se den para éstos, van a ser fáciles de comprenderse y de utilizarse.

Los conjuntos se van a entender, intuitivamente, como agregados de cosas. Las cosas que pueden formar parte de un conjunto son, en principio, las que uno quiera. Sin embargo, al definir precisamente los conceptos se evitan problemas de consistencia que pueden aparecer si se permite una libertad excesiva en la construcción.

En los conjuntos, un concepto fundamental es el de que un elemento pertenezca o no a la colección de que se trata. Como uno esperaría poder referirse a un conjunto explicando cuáles son los elementos que lo constituyen como colección, no van a ser importantes ni el orden en que se mencionen estos elementos ni si se repiten algunos en la descripción. Esto hace las cosas más sencillas desde el punto de vista matemático[1].

5.1 CONJUNTOS

Un conjunto es un agregado de objetos.

La notación

$$x \in A$$

se usa para significar que el objeto x *es elemento* del conjunto A. También se lee "x *pertenece a* A".

[1] Si el orden llega a ser importante, se puede pensar en otras formas de concebir agregados de elementos, como son las *secuencias* y las *sucesiones* (cf. 6). Si las repeticiones importan, se puede hablar de *bolsas* (inglés: *bags*).

En informática se escribe (puede variar, según el lenguaje)

`x:A`

para significar "`x` *es de tipo* `A`". La noción es cercana a la pertenencia de conjuntos, porque los tipos son conjuntos dotados de operaciones[2].

Definir un conjunto se refiere a declarar los elementos que pertenecen a él. La definición se hace evidente mediante una notación especial, por lo que también se habla de *denotar*. Esto se puede hacer de manera *extensional*, cuando la colección de elementos se establece con una enumeración (que termina). También puede hacerse de manera *intensional*[3], cuando se establece una propiedad que deben cumplir los elementos.

La notación extensional para conjuntos consiste en listar, enmarcados en llaves '`{`', '`}`' los elementos del conjunto, separados por comas, v.gr.,

```
{a,e,i,o,u}
{0,1,2,3}
{APA, AUV, JMSC}
{}
```

La notación intensional puede describirse con la regla sintáctica

$\{\langle\texttt{variable}\rangle\texttt{:}\langle\texttt{dominio}\rangle \mid \langle\texttt{predicado}\rangle\}$

donde

$\langle\texttt{variable}\rangle$ es un identificador de variable

$\langle\texttt{dominio}\rangle$ es un universo en el que la variable puede tomar valores

$\langle\texttt{predicado}\rangle$ es un predicado que puede mencionar la variable.

Como ejemplos de notación intensional:

$\{\texttt{n:}\mathbf{nat} \mid \texttt{n>5}\}$

$\{\texttt{r:}\mathbf{real} \mid (\exists \texttt{p,q:}\mathbf{int} \mid \texttt{q}\neq\texttt{0} : \texttt{r = p/q})\}$

$\{\texttt{z:}\mathbf{int} \mid \texttt{z=0} \vee \texttt{z=1} \vee \texttt{z=2} \vee \texttt{z=3}\}$

La notación extensional está claramente limitada a conjuntos que no tengan una infinidad de elementos. Sin embargo, se usa de manera informal para conjuntos infinitos discretos, apelando al sentido común del interlocutor:

```
{0,1,2,3,…}
{…,-3,-2,-1,0,1,2,…}
```

Al denotar extensionalmente no importan el orden ni las repeticiones de elementos. Así, se entiende que, por ejemplo:

```
{a,e,i,o,u}
{a,i,o,e,u}
{a,a,o,i,o,o,i,e,u}
```

deben denotar el mismo conjunto.

5.1.1 Conjuntos "conocidos"

En Matemáticas se trabaja con ciertos conjuntos que aquí se darán por conocidos:

---

[2] Esta idea de tipo coincide con la que ya se usó al presentar las cuantificaciones en capítulos anteriores.

[3] Ni "extensional" ni "intensional" son palabras del español, pero es corriente llamar de estas maneras a las formas de denotar los conjuntos.

Matemáticas	**Informática**	**Significado**	**Elementos**
∅	{}, void	Conjunto vacío	
U (no estándar)		Conjunto universo	Todos "los que interesan"
N	**nat**	Números naturales	0,1,2,3,...
Z	**int**	Números enteros	...,-3,-2,-1,0,1,2,3,…
Z^+	**int**$^+$	Números enteros positivos	1,2,3,...
R		Números reales	0, -17, 17.23, π, e, ... (ejemplos)
Q	**real float rat**	Números reales racionales	p/q:**R**, con p,q:**Z**, q≠0
Q^+	**real**$^+$ **float**$^+$ **rat**$^+$	Números racionales positivos	p/q:**R**, con p,q:**Z**$^+$, q≠0
C		Números complejos	a+ib, con a,b:**R**, i=√(-1)

La notación en informática no es estándar (depende de los textos, lenguajes de programación, etc., donde estos conjuntos se mencionen). Pero es usual que en un lenguaje de programación se distinga *tipos de valores*, que no son otra cosa que conjuntos manejados de manera básica en el lenguaje.

5.1.2 Operaciones sobre conjuntos

La notación de conjuntos y la teoría alrededor es muy usada en diferentes contextos. La siguiente tabla debe entenderse como un recuento de esta notación y del significado pretendido con los símbolos de la teoría (contención de un conjunto en otro, unión e intersección, etc.).

En la tabla, A y B son conjuntos. La segunda columna enseña cómo se lee la notación y la tercera cuál será el significado formal de la misma. Los ejemplos pretenden ilustrar la notación con usos que se entiendan de manera intuitiva.

Notación	**Se lee**	**Significado**	**Ejemplos**
A ⊆ B	A *contenido en* B A *subconjunto de* B	Todo elemento de A es elemento de B: (∀x|: x∈A ⇒ x∈B)	{1,2} ⊆ {1,2} **nat** ⊆ **int**
A ⊂ B	A *contenido propiamente en* B A *subconjunto propio de* B	Todo elemento de A es elemento de B, pero no todo elemento de B es elemento de A: A ⊆ B ∧ ¬(B ⊆ A)	{1,2} ⊂ {1,2,3,4} **nat** ⊂ **int**
A ∪ B	A *unión* B	Conjunto que contiene los elementos de A y los de B: {x| x∈A ∨ x∈B}	A = {1,2} B = {1,3,5} A ∪ B = {1,2,3,5}
A ∩ B	A *intersección* B	Conjunto que contiene los elementos comunes de A y de B: {x| x∈A ∧ x∈B}	A = {1,2} B = {1,3,5} A ∩ B = {1}

A\B A-B	A *menos B*	Conjunto que contiene los elementos en A que no están en B: $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	A = {1,2} B = {1,3,5} A\B = {2} B\A = {3,5}
A^C $\overline{A}$	A *complemento*	Conjunto de elementos del universo que no están en A: $\{x \mid x \notin A\}$	U\A
2^A **P**(A)	*Potencia de* A *Partes de* A	Conjunto de subconjuntos de A: $\{B \mid B \subseteq A\}$	A = {1,3,5} $2^A = \{\varnothing,\{1\},\{3\},\{5\},\{1,3\},\{1,5\},\{3,5\},\{1,3,5\}\}$
#A |A|	*Cardinal de* A *Tamaño de* A	Número de elementos en A: (+x | x∈A : 1)	A = {1,3,5} #A = 3 $\#(2^A) = 8$
A × B	A *cruz* B *Producto cartesiano de* A *y* B	Conjunto de parejas, cada una con el primer elemento en A y el segundo en B: $\{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$	A = {1,3,5} C = {-1,3} A×C ={(1,-1),(1,3),(3,-1),(3,3),(5,-1),(5,3)}

Un conjunto A es *finito* cuando tiene n elementos diferentes, para un n∈**nat**. Es decir, si los elementos del conjunto se pueden enumerar o contar, de modo que este proceso termine[4]. En este caso, |A|=n. Nótese que |∅|=0. Un conjunto es *infinito* cuando no es finito.

Un conjunto definido por extensión es, necesariamente, finito. Por ejemplo:
{Hugo, Paco, Luis}
{a,b,c,a,d,e,e,f,g,h,i,b}

Lo de terminar de contar es importante, cuando se trata de un conjunto finito. De hecho, **nat**, el conjunto mismo de los números naturales se puede contar, pero este conteo no termina como proceso. Por eso **nat** es un conjunto infinito.

Hay otros conjuntos infinitos. Por ejemplo, el de los números naturales pares, o el de los números reales (¿por qué?).

5.1.3 Más sobre notación intensional

Se dice de la notación intensional A = {x:U | p(x)} que define al conjunto A *por comprensión*. El universo U puede mencionarse explícitamente, pero muchas veces se omite cuando es sobreentendido.

Hay una relación precisa entre las dos formas de denotación. De hecho, si un conjunto se puede denotar extensionalmente, entonces también se puede denotar intensionalmente. Más precisamente:

[4] Más adelante se podrá dar una definición más técnica de conjunto finito. Por ahora basta tener una idea intuitiva relacionada con la posibilidad de que una enumeración de los elementos del conjunto sea un proceso que termine.

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \text{ denota el mismo conjunto que } \{x \mid x=a_1 \vee x=a_2 \vee \ldots \vee x=a_n\}.$$

En otras palabras, se debe entender que la notación extensional no es más que una forma alternativa de representar un conjunto que tiene ya una denotación intensional. O bien, decir que la notación extensional se define en términos de la intensional.

La notación intensional es claramente necesaria para denotar conjuntos con una infinidad de elementos. Sin embargo, puede resultar práctica para referirse a conjuntos finitos grandes, v. gr..

$$\{x{:}\mathbf{nat} \mid 0<x<100000\}$$

El predicado que define a un conjunto puede ser muy complicado de entender, lo que puede hacer complicado saber si un elemento está o no en el conjunto.

Ejercicios 5.1

1 Complete cada espacio en blanco __ en los siguientes ejercicios, usando alguno de los símbolos $\subseteq$, $\supseteq$ $\times$, \, $\cup$ o $\cap$, de forma que la expresión resultante sea verdadera:

a $\{(1,5),(2,-1),(50,30)\} \subseteq \mathbf{nat}$ __ $\mathbf{int}$

b $\{x{:}\mathbf{nat} \mid (\exists y{:}nat \mid {:}x=2y)\}$ __ $\{x{:}\mathbf{nat} \mid (\exists y{:}nat \mid {:}x=4y)\}$

c $\mathbf{nat} = \{x{:}\mathbf{nat} \mid (\exists y{:}\mathbf{nat} \mid {:}x=2y)\}$ __ $\{x{:}\mathbf{nat} \mid (\exists y{:}\mathbf{nat} \mid {:}x=2y+1)\}$

d $\{\} = \{x{:}\mathbf{nat} \mid (\exists y{:}nat \mid {:}x=2y)\}$ __ $\{x{:}\mathbf{nat} \mid (\exists y{:}nat \mid {:}x=2y+1)\}$

e $A = A$ __ A^c

2 Sean $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y\}$, $C=\{0,1\}$. Calcule las siguientes expresiones de conjuntos:

a $(A \times B) \times C$

b $A \times (B \times C)$

c $(A \cup B) \times C$

d $A \cup B \cup C$

e $(A \cup B) \cap C$

f $A \cup (B \cap C)$

g $\mathbf{P}(A)$

h $\mathbf{P}(\mathbf{P}(C)))$

3 Determine si cada uno de los siguientes conjuntos es finito o infinito y explique su respuesta.

a **nat**

b Los números pares entre 100 y 500.

c Los números reales.

5.2 AXIOMAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Debe entenderse que los conjuntos son constituidos por elementos de un *universo* U. Este es, de hecho, un conjunto de la teoría. Otro conjunto importante es el conjunto *vacío*, denotado {} o ∅. El conjunto vacío no tiene ningún elemento.

La teoría de conjuntos cumple, además de los axiomas generales de la lógica de predicados, dos axiomas propios que permiten establecer con rigor cuándo un elemento pertenece a un conjunto y cuándo dos conjuntos son iguales.

Axioma: Pertenencia

$y \in \{x:U \mid p.x\} \equiv p.y$

[]

Axioma: Igualdad

$A = B \equiv (\forall x:U \mid: x \in A \equiv x \in B)$

[]

5.2.1 Igualdad en conjuntos

En esencia, el axioma de igualdad de conjuntos permite afirmar que dos conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos. Las siguientes son formas de mostrar la igualdad de conjuntos:

Teo A : (Igualdad de conjuntos)

(1) $A = B \equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

(2) $A = \{x|p(x)\},\ B = \{x|q(x)\}:\ A = B \equiv (\forall z|: p(z) \equiv q(z))$

Dem: Se omite.

[]

La segunda y tercera formas de mostrar igualdad requieren entender qué es una cuantificación universal y establecen métodos de prueba interesantes:

- se toma un elemento de un lado y se muestra en el otro.
- se prueba que los predicados que definen por comprensión son equivalentes.

Ejercicios 5.2

Demuestre los siguientes resultados:

1 El conjunto vacío no tiene elementos.

2 Todo elemento pertenece al conjunto universo U.

3 $\{a,b\} = \{b,a\}$.

4 $\{a,a\} = \{a\}$

5 Teorema A (igualdad de conjuntos).

5.3 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Hay una correspondencia natural entre las propiedades de las operaciones booleanas y las de los conjuntos, que se dan desde la definición misma de las operaciones de conjuntos en términos de expresiones booleanas.

Por ejemplo, considérese el siguiente teorema y su demostración:

Teo A: (De Morgan) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Dem:

Por el teorema de igualdad de conjuntos, para demostrar el resultado basta probar que:

$$z \in (A \cup B)^c \equiv z \in A^c \cap B^c.$$

Ahora:

$$
\begin{array}{ll}
 & z \in (A \cup B)^c \\
= & \quad \langle \text{Def } X^c \rangle \\
 & \neg(z \in (A \cup B)) \\
= & \quad \langle \text{Def } \cup \rangle \\
 & \neg(z \in A \vee z \in B) \\
= & \quad \langle \text{De Morgan} \rangle \\
 & \neg z \in A \wedge \neg z \in B \\
= & \quad \langle \text{Def } X^c \rangle \\
 & z \in A^c \wedge z \in B^c \\
= & \quad \langle \text{Def } \cap \rangle \\
 & z \in A^c \cap B^c
\end{array}
$$

[]

La argumentación transforma el afirmar una propiedad de conjuntos en términos de una afirmación de una propiedad similar entre expresiones booleanas. Y la prueba de esta ley de De Morgan para conjuntos se apoya, precisamente, en la ley de De Morgan para expresiones lógicas.

5.3.1 Resultados importantes

La teoría de conjuntos tiene resultados importantes que relacionan sus operadores de una manera análoga a operadores correspondientes de la lógica. Las demostraciones de estos resultados se pueden llevar a cabo reduciendo problemas de propiedades de conjuntos a propiedades correspondientes en lógica.

La siguiente tabla contiene algunos de estos teoremas:

$\cap$-Identidad	$A \cap U = A$
$\cup$-Identidad	$A \cup \varnothing = A$
$\cap$-Dominancia	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$\cup$-Dominancia	$A \cup U = U$
$\cap$-Idempotencia	$A \cap A = A$
$\cup$-Idempotencia	$A \cup A = A$
Doble complemento	$(A^c)^c = A$

$\cap$-Conmutatividad	$A \cap B = B \cap A$
$\cup$-Conmutatividad	$A \cup B = B \cup A$
$\cap$-Asociatividad	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$
$\cup$-Asociatividad	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$
Distributividad $\cap$/$\cup$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Distributividad $\cup$/$\cap$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
De Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$
Absorción	$A \cap (A \cup B) = A$
Medio excluído	$A \cup A^c = U$
Contradicción	$A \cap A^c = \varnothing$
Definición de $\subseteq$	$A \subseteq B \;=\; (\forall x:U\|: x\in A \Rightarrow x\in B)$
Contrapositiva	$A \subseteq B \;=\; B^c \subseteq A^c$
Distributividad $\subseteq$/$\cap$	$A \subseteq (B \cap C) \;=\; (A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)$

5.3.2 Meta teoremas de Dualidad y de Representación

Como se ilustra en la tabla de 5.3.1, los teoremas en la Teoría de Conjuntos tienen una relación muy cercana con los de la lógica proposicional. La relación se puede establecer de manera más precisa con el siguiente resultado.

Meta teorema A: (*de representación*)
Sea E_S una expresión de conjuntos construida con variables de conjunto, $\varnothing$, U, $.^c$, $\cap$ y $\cup$.
Sea E_P una expresión booleana construida desde E_S con la transformación:

$\varnothing \;\rightarrow\;$ `false`
$U \;\rightarrow\;$ `true`
$\cap \;\rightarrow\; \wedge$
$\cup \;\rightarrow\; \vee$
$.^c \;\rightarrow\; \neg$

Entonces, vale que:

a $\vdash E_S = F_S$ ssi $\vdash E_P \equiv F_P$
b $\vdash E_S \subseteq F_S$ ssi $\vdash E_P \Rightarrow F_P$
c $\vdash E_S = U$ ssi $\vdash E_P$

[]

Ejemplo A

a Para mostrar la ley de absorción para conjuntos:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

basta probar que[5]:

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A.$$

Y esto es verdad, precisamente, por la ley de absorción en lógica.

b Para mostrar la ley de contrapositiva en conjuntos

$$A \subseteq B \;=\; B^c \subseteq A^c$$

basta probar que:

$$A \Rightarrow B \;\equiv\; \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Y esto es verdad, precisamente, por la ley de contrapositiva en lógica.

c Para mostrar la ley de medio excluido en conjuntos

$$A \cup A^c = U$$

basta probar que:

$$A \vee \neg A.$$

Y esto es verdad, precisamente, por la ley del medio excluido en lógica.

§

Otra relación interesante que se da en la Teoría de Conjuntos es la de la *dualidad* entre ciertos conceptos, lo que permite recordar la verdad de unos teoremas como duales de otros conocidos. El concepto se origina en el análogo para lógica proposicional.

En lógica proposicional, dada una expresión booleana P, se define P_D su expresión *dual* como una expresión booleana construida a partir de P con los siguientes intercambios:

true	$\leftrightarrow$	false
$\wedge$	$\leftrightarrow$	$\vee$
$\equiv$	$\leftrightarrow$	$\not\equiv$
$\Rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\not\Leftarrow$
$\Leftarrow$	$\leftrightarrow$	$\not\Rightarrow$

Por ejemplo:

$(p \vee q)_D \quad \equiv p \wedge q$

$(p \equiv \neg p)_D \quad \equiv p \not\equiv \neg p$

$(\neg p \wedge \neg q \equiv r)_D \quad \equiv \neg p \vee \neg q \not\equiv r$

Y es conocido el siguiente meta teorema:

Meta teorema B: (*Dualidad en lógica proposicional*)

(a) $\vdash P$ ssi $\vdash \neg P_D$

(b) $\vdash P \equiv Q$ ssi $\vdash P_D \equiv Q_D$

[]

Este resultado, junto con el Metateorema de representación, justifican que se pueda hablar de un resultado correspondiente en Teoría de conjuntos.

---

5 Se usan las mismas letras (A, B, ...) en dos expresiones de diferente tipo, pero debe entenderse que denotan conjuntos o expresiones booleanas dependiendo de las operaciones.

Metateorema (*Dualidad en Teoría de Conjuntos*)

Dada una expresión de conjuntos P, se define P_D su expresión *dual* como una expresión de conjuntos construida a partir de P con los siguientes intercambios:

$$\begin{array}{ccc} U & \leftrightarrow & \varnothing \\ \cap & \leftrightarrow & \cup \\ = & \leftrightarrow & \neq \\ \subseteq & \leftrightarrow & \not\supseteq \\ \supseteq & \leftrightarrow & \not\subseteq \end{array}$$

Entonces:

$$\vdash P = Q \quad \text{si y solo si} \quad \vdash P_D = Q_D$$

[]

Ejemplo B

a Para mostrar la segunda ley de absorción para conjuntos:

$$A \cap (A \cup B) = A$$

basta probar el dual

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Y esto es verdad por la primera ley de absorción en conjuntos.

b Para mostrar la ley de contradicción en conjuntos

$$A \cap A^c = \varnothing$$

basta probar el dual:

$$A \cup A^c = U.$$

Y esto es verdad, precisamente, por la ley del medio excluido en lógica.

§

5.3.3 Uniones e intersecciones generalizadas

Tanto $\cap$ como $\cup$ son operaciones binarias, asociativas, conmutativas y con elemento neutro (ACUs, en la terminología del Cap. 3). Por tanto, se pueden usar como operaciones de cuantificación.

Entonces se puede justificar la definición de los conjuntos:
$(\cup k | Q : E)$: conjunto que une los conjuntos E para los que k cumple Q.
$(\cap k | Q : E)$: conjunto que intersecta los conjuntos E para los que k cumple Q.

Y su significado se puede establecer con los siguientes axiomas:

Axioma: Pertenencia $\cup$

$$y \in (\cup k | Q : E) \equiv (\exists k | Q : y \in E)$$

[]

Axioma: Pertenencia $\cap$

$$y \in (\cap k | Q : E) \equiv (\forall k | Q : y \in E)$$

[]

Ejemplo A

Sea A_i = {j:**nat** | i≤j}, para i∈**nat**. Nótese que x∈A_{i+1} ⇒ x∈A_i, para i∈**nat**. También: A_0=**nat**.

a Para n∈**nat** : (∪i| 0≤i≤n : A_i) = **nat**. Para comprobar esto:

```
  x∈(∪i| 0≤i≤n : Aᵢ)
=    ⟨Ax Pertenencia ∪⟩
  (∃i| 0≤i≤n : x∈Aᵢ)
=    ⟨ Partir rango ⟩
  x∈A₀ ∨ (∃i| 1≤i≤n : x∈Aᵢ)
=    ⟨ A₀ = nat ⟩
  x∈nat ∨ (∃i| 1≤i≤n : x∈Aᵢ)
⇐    ⟨ Debilitamiento ⟩
  x∈nat
```

En este caso, el universo es **nat**, de modo que se ha demostrado que

nat ⊆ (∪i| 0≤i≤n : A_i)

y, como la contención del conjunto de la derecha en **nat** también se da (el resultado de la unión es un subconjunto de **nat**), hay igualdad.

b Para n∈**nat** : (∩i| 0≤i≤n : A_i) = A_n. Se comprueba de manera análoga a la de **a**.

§

Los axiomas de pertenencia a uniones e intersecciones arbitrarias permiten establecer un teorema que generaliza las leyes de De Morgan:

Teo A:
a $(\cup k|\ Q : E)^c = (\cap k|\ Q : E^c)$
b $(\cap k|\ Q : E)^c = (\cup k|\ Q : E^c)$

Dem: Se omite.

[]

5.4 REPRESENTACIÓN DE CONJUNTOS EN LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN

Aunque no es generalizado, los lenguajes de programación no suelen incluir mecanismos predefinidos para el manejo de conjuntos. Entre las colecciones que se manejan corrientemente se pueden considerar agregados ordenados donde las repeticiones son significativas (v.gr., arreglos, secuencias, listas ordenadas). Si un programa va a representar y manipular conjuntos, el programador debe decidir cómo quiere representar los conjuntos en términos de las estructuras de datos de que dispone.

Es usual que una aplicación maneje conjunto dentro de un universo finito U. Si el universo es

$$U = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$$

hay que tomar decisiones en cuanto a cómo representar conjuntos X ⊆ U y cómo decidir si un elemento x está en uno de estos conjuntos. Las demás operaciones de conjuntos se pueden definir teniendo en cuenta la representación elegida y el significado mismo de las operaciones.

Idea 1: Cadenas de bits

Representar X con una cadena de bits $s.X = \langle b_1, b_2, ..., b_N \rangle$, tal que $b_i = 1 \equiv a_i \in X$, $i = 1, \ldots, N$.

Nótese que:

- $s.\varnothing \quad = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$
- $s.U \quad = \langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$
- $s(X \cup Y) \quad = \langle x_1 \vee y_1,\ x_2 \vee y_2, \ldots,\ x_N \vee y_N \rangle$
- $s(X \cap Y) \quad = \langle x_1 \wedge y_1,\ x_2 \wedge y_2, \ldots,\ x_N \wedge y_N \rangle$
- $s(X^c) \quad = \langle \neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_N \rangle$

Idea 2: Arreglos

Representar X con un arreglo de valores enteros $e.X = [k_1, k_2, ..., k_N]$, tal que $e[i] = 1$, si $a_i \in X$, y $e[i] = 0$, en otro caso, para $i = 1, \ldots, N$.

Nótese que:

- $s.\varnothing \quad = [0, 0, \ldots, 0]$
- $s.\mathbf{U} \quad = [1, 1, \ldots, 1]$
- $s(X \cup Y) \quad = [\max(x_1, y_1),\ \max(x_2, y_2), \ldots,\ \max(x_N, y_N)]$
- $s(X \cap Y) \quad = [x_1 * y_1,\ x_2 * y_2, \ldots,\ x_N * y_N]$
- $s(X^c) \quad = [1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_N]$.