3.1

1 `a max b` ≈ "máximo entre los números naturales (enteros no negativos) `a`, `b`"
`max` es asociativa : `a max (b max c) = (a max b) max c`
`max` es conmutativa : `a max b = b max a`
`max` tiene neutro : `a max 0 = 0 max a = a`
Entonces , sí se define una cuantificación `(max a | Q : S)`.

2 `a max b` ≈ "máximo entre los números reales `a`, `b`"
No hay elemento neutro. No se puede definir la cuantificación.

3 `a min b` ≈ "máximo entre los números reales no negativos `a`, `b`"
`min` es asociativa : `a min (b min c) = (a min b) min c`
`min` es conmutativa : `a min b = b min a`
Pero no hay elemento neutro, ya que éste debería ser mayor que cualquier real no negativo.

Si se define **R*** como el conjunto de los números reales no negativos aumentados con un elemento nuevo, denotado ∞, se puede comprobar que la asociatividad y la conmutatividad siguen valiendo y, además, que ∞ hace las veces de elemento neutro, i.e.:
`a min ∞ = ∞ max a = a`
Entonces , sí se define una cuantificación `(min a:`**`R*`**` | Q : S)`.

4 `a & b` ≈ "cadena de caracteres resultado de concatenar las cadenas `a`, `b`"
`&` es asociativa y tiene como elemento neutro la cadena vacía ε. Pero no es conmutativa.

No se puede definir una cuantificación con todas las propiedades postuladas en el Cap 3. Sin embargo, la notación de cuantificación se podría usar cuidando de no apoyarse en hipótesis que requieran una evaluación en la que los operandos puedan ser permutados.

5 `a ≡ b` ≈ "`a` equivale a `b`" (valores booleanos)
≡ es asociativa : `a ≡ (b ≡ c) ≡ (a ≡ b) ≡ c`
≡ es conmutativa : `a ≡ b = b ≡ a`
≡ tiene neutro : `a ≡ true ≡ a`
Entonces , sí se define una cuantificación `(≡a | Q : S)`.

3.2

1

1a `(•x| 0<x+r<n : x+1)`

1b `(•y| 0<y+r<n : y+v)`

1c `(•y| 0<y+r<n-x : y+v)`

1d `(•w| 0<w<x+2*y : (•z| 0<z<n : w+z+x+2*y))`

2

2a

```
   (+x:int | 0<x≤2 : x²)
=     〈 0<x≤2 ≡ x=1 〉
   (+x:int | x=1 : x²)
=     〈 1 pto 〉
   (x²)[x:= 1]
=     〈 Sust 〉
   1²
```

2b

```
   (∧x:bool | x : true ⇒ x)
=     〈 x ≡ x ≡ true 〉
   (∧x:bool | x ≡ true : true ⇒ x)
=     〈 1 pto 〉
   (true ⇒ x)[x:= true]
=     〈 Sust 〉
   true ⇒ true
```

2c

`(*x:nat | par.x : x+1)`

No es posible usar el axioma de un punto, porque precisamente hay más de un punto en el rango.

3

3a Sí, todas las sumas son finitas (sobre un rango finito) y bien definidas.

3b No: la parte izquierda está bien definida, aunque sea una suma de un número infinito, porque todos los sumandos son `0`; las sumas del lado derecho no están bien definidas (divergen).

3c Sí, todas las sumas son finitas (sobre un rango finito) y bien definidas.

4 Explique en cuales casos está bien utilizado el axioma de Renombramiento de variable de cuantificación. Indique cuál fue el renombramiento utilizado.

4a `(+x| 0≤x<n+1 : 2*x) = (+y| 0≤y<n+1 : 2*y)`

Cambio de variable: `x:= y`. Bien usado el axioma.

4b `(*x| 0≤x<n+1 : x+3) = (*n| 0≤n<n+1 : n+3)`

Cambio de variable: `x:= n`. Mal usado el axioma: a la derecha, a variable `n` es dependiente de la variable de cuantificación `n`.

4c `(∀p| p ⇒ ¬p : ¬p) = (∀r| r ⇒ ¬r : ¬r)`

Cambio de variable: `p:= r`. Bien usado el axioma.

4d `(∃p| p ⇒ (r ∨ q) : p ⇐ q) = (∃r| r ⇒ (r ∨ q) : r ⇐ q)`

Cambio de variable: `p:= r`. Mal usado el axioma: la nueva variable no es independiente de la variable de cuantificación `r`.

5 Verificar si las expresiones calculan el mismo valor; de no ser así explicar por qué.

5a

$$
\begin{aligned}
& (+x \mid 0 \le x \le 2 : 2*x) \\
= \quad & \langle\ x := y+5\ \rangle \\
& (+y \mid 0 \le y+5 \le 2 : 2*(y+5))
\end{aligned}
$$

Sí, representan el mismo valor.

5b

Se puede pensar que sí, por un cambio de variable:

$$
\begin{aligned}
& (+x \mid 0 \le x \le 2 : 2*x) \\
= \quad & \langle\ x := y^2\ \rangle \\
& (+y \mid 0 \le y^2 \le 2 : 2*y^2))
\end{aligned}
$$

Pero el cambio de variable no es posible, porque la función $f.y = y^2$ no es invertible en el dominio de los enteros. Esto hace que la expresión de la izquierda se evalúe en tres valores de la variable de cuantificación, mientras que en la expresión a la derecha solo hay dos valores.

3.3

1

Teo: $(\oplus i \mid 0 \le i < n+1 : E) = (\oplus i \mid 0 \le i < n : E) \oplus E[i := n]$

Dem:

$$
\begin{aligned}
& (\oplus i \mid 0 \le i < n+1 : E) \\
= \quad & \langle\ 0 \le i < n+1 \equiv 0 \le i < n \vee i = n\ \rangle \\
& (\oplus i \mid 0 \le i < n \vee i = n : E) \\
= \quad & \langle\ \text{Partir rango}\ \rangle \\
& (\oplus i \mid 0 \le i < n : E) \oplus (\oplus i \mid i = n : E) \\
= \quad & \langle\ 1\ \text{pto}\ \rangle \\
& (\oplus i \mid 0 \le i < n : E) \oplus E[i := n]
\end{aligned}
$$

[]

La segunda parte del teorema se demuestra en forma análoga.